

## REPRESENTAÇÃO E SOLUÇÃO DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS: UMA CONTRIBUIÇÃO PARA A PSICOPEDAGOGIA.

Adriana Maria Corder Molinari<sup>1</sup>

**RESUMO:** Este artigo visa a discutir as representações de crianças em problemas de divisão aritméticas. Inicialmente, apresenta-se a definição de representação e o papel desta na solução de problemas aritméticos e, em seguida, apresentam-se formas pela quais as crianças representam graficamente os procedimentos de solução de problemas de divisão. Por se tratar de um importante elemento cognitivo para a compreensão de tarefas a serem executadas, faz-se necessário que educadores e psicopedagogos compreendam a importância da construção de representações, pois é ela quem direciona o sujeito no planejamento e na elaboração de procedimentos para a realização da tarefa, guiando-o para os fins a serem atingidos. Uma vez que os objetos matemáticos não são acessíveis pela percepção, eles dependem de sistemas representativos para serem compreendidos. Portanto, o profissional que trabalha com a aprendizagem das crianças, deve compreender que, em especial para o conhecimento matemático, a representação tem o papel fundamental.

**Palavras-chave:** representação; solução de problemas; divisão aritmética; aprendizagem.

## REPRESENTATION AND SOLUTION OF MATH PROBLEMS: A CONTRIBUTION TO PSYCHOPEDAGOGY

**ABSTRACT:** This paper discusses the representation of children in arithmetic division problems. Initially, it presents the definition and the role of representation in solving arithmetic problems and then presents ways in which children represent graphically the procedures for solving problems of division. Because it is an important element for understanding cognitive task to perform, it is necessary that educators and educational psychologists to understand the importance of building representations, for it is the building representations that direct the subject in planning and developing procedures for conducting the task, leading him to the ends to be achieved. Since mathematical objects are not accessible by the perception, they rely on representative systems to be understood. Therefore, professionals working with children's learning, must understand that, especially for mathematical knowledge, the representation has the key role.

**Keywords:** representation, problem solving, arithmetic division; learning.

---

<sup>1</sup> Doutora em Educação. Pesquisadora colaboradora no Laboratório de Psicologia Genética da Faculdade de Educação da UNICAMP, Docente no curso de graduação em Pedagogia e Especialização em Psicopedagogia da Faculdade Dom Bosco de Piracicaba, Docente nos Cursos de Especialização em Psicopedagogia Clínica e Institucional do Centro Universitário Padre Anchieta – Jundiá e do Programa de Pós-Graduação Lato Sensu no Curso de Psicopedagogia, da Faculdade Adventista de Educação e Ciências Humanas.  
E-mail: dri.molinari@uol.com.br.

Do ponto de vista da solução de problemas, a representação é antecipadora do fim a se atingir, “ela guia o sujeito na ação procedimental que este vai exercer sobre o real” (MORGADO, 1994, p.12). Assim, a representação é normalmente sujeita a reorganizações para uma construção mais adequada; ela vai sendo reelaborada ao longo da execução do problema (estratégias).

A representação é um elemento cognitivo diretamente relacionado à solução de problemas, uma vez que, para solucionar um problema, o indivíduo, após compreender o enunciado proposto, deverá elaborar uma representação da situação em questão.

O que diferencia o homem de outras espécies são as suas funções mentais superiores, ou seja, sua capacidade de pensar e raciocinar, a linguagem, a memória, a atenção e sua especificidade cognitiva, em outras palavras, sua capacidade de representar mentalmente os objetos e os eventos externos.

Piaget (1990/1998) denomina a capacidade de representar mentalmente como *função simbólica* que, no decorrer do desenvolvimento humano, surge quando as ações sensório-motoras são interiorizadas e aparece o pensamento propriamente dito (no período da inteligência intuitiva).

Tal função consiste na representação de um “significado” (objeto, acontecimento ou esquema motor) qualquer, por meio de um “significante” diferenciado e específico para esse fim. Quando de posse da função simbólica, a criança passa a utilizar-se de meios para representar o que ela conhece do mundo: a imitação, o jogo simbólico, o desenho, a imagem mental e a linguagem.

Para o autor, o pensamento só cessa de traduzir-se em imagens com o pensamento operatório, pois, somente nesse período, o mesmo se torna reversível e a acomodação se generaliza.

Segundo Delval (2007), os progressos no desenvolvimento psicológico são constituídos por mudanças relacionadas a três fenômenos: mudanças nas condutas, mudanças nos instrumentos intelectuais e mudanças nas representações sobre a realidade, dependendo as últimas “dos instrumentos com que são construídas” (p.90). Constroem-se as representações a partir de conhecimentos anteriores.

Para Delval (2007), a representação é uma atividade intencional, pois são “representações para alguém, sobre algo” (p.90), comportando três elementos: algo que é

representado (significado), algo que representa (significante) e um sujeito (que utiliza o significante para designar o significado).

Este autor afirma que a representação é intencional, porque é o sujeito quem estabelece a relação entre o significado e o significante e sempre visa a um fim, como, por exemplo, quando o sujeito deseja algo ou tem uma necessidade; para atingir esse fim, criará uma representação da situação (considerando como pode ser resolvido seu problema) e irá agir sempre em função das representações por ele criadas.

São os fins que originam a ação e são determinados pela representação que o sujeito faz da situação. Delval acredita que as representações têm, em sua origem, um elemento de necessidade, porque são construídas conforme essas necessidades, que se podem tanto relacionar a problemas práticos como a fenômenos subjetivos, como, por exemplo, um problema de origem lógico-matemática.

Portanto, as representações não são sempre conscientes, pois elas não estão prontas e disponíveis em nossa consciência e nem em qualquer outra parte, mas são criadas à medida que se queira satisfazer um desejo ou uma necessidade.

Basta observarmos as crianças, quando são instigadas a dar respostas para algumas solicitações feitas: elas elaboram suas próprias hipóteses — no seu plano de representação — a respeito dos fenômenos do mundo, sejam eles físicos ou psíquicos, sejam naturais.

As representações são elaboradas na medida em que nos deparamos com algo que precisa ser resolvido;

Como afirma Delval (2007), “poderia parecer que o sujeito, num momento em que precisasse, combinaria distintos elementos dispostos anteriormente, de acordo com as necessidades do momento” (p.95). Para o autor, a representação é provocada:

[...] somente no caso em que existam elementos discordantes. Quando vou acender a luz do meu quarto, não preciso pôr em funcionamento uma representação explícita se a luz acende quando aperto o interruptor, pois limito-me a aplicar um esquema que está automatizado em mim; porém, se a luz não acende, então, é quando preciso ativar uma representação. (p.97-98).

O mesmo autor descreve algumas características das representações, conforme o quadro a seguir:

CARACTERÍSTICAS DAS REPRESENTAÇÕES	
Origem	Os sujeitos precisam de representações para sobreviver no mundo.
Funções	As representações permitem agir e entender.
Elaboração	São produzidas como respostas à satisfação de necessidades, portanto, têm sua finalidade na ação e na sobrevivência.
Constituem o conteúdo da mente	As representações são o que está na mente dos indivíduos, são o dado que devemos estudar primordialmente, mas não são acessíveis de forma direta.
Não são explícitas	As representações não existem de forma fixa a não ser em casos excepcionais, pois vão sendo geradas à medida da necessidade do sujeito.
Características comuns	As representações não são específicas a cada problema, mas têm características comuns e gerais, que aparecem sobretudo no tipo de atuação que os sujeitos realizam.
Evolução	A formação de representações segue uma série de estágios regulares.
Importância educativa	As representações têm uma enorme importância do ponto de vista educativo, pois é nisso que os professores contribuem para formar e modificar.

**Quadro 1. Características das Representações descritas por Juan Delval (2007, p. 97).**

Na perspectiva do autor, do ponto de vista educativo, as representações têm grande importância, pois se pretende, por meio da educação, propiciar, aos sujeitos, que “eles sejam capazes de formar explicações que se adaptem às teorias científicas, que não sejam desmentidas pelos observáveis e que possam utilizar as explicações e os procedimentos de indagações característicos do pensamento científico” (DELVAL, 2007, p.103).

Para o conhecimento matemático, a representação tem papel fundamental, uma vez que os objetos matemáticos não são acessíveis pela percepção, dependendo de sistemas representativos para serem compreendidos.

“Representação é sempre representação de algo” e os conceitos matemáticos estão relacionados à atividade mental das pessoas (TEIXEIRA, 2005, p.19).

De acordo com a autora:

A aprendizagem de conceitos matemáticos é uma área privilegiada para estudar e compreender o papel das representações na atividade cognitiva, ou seja, como os conceitos matemáticos estão relacionados à atividade mental das pessoas (p.19).

Para Kamii (2005), “representação é o que um ser humano faz. Os símbolos não representam; é sempre um ser humano que usa um símbolo para representar uma ideia” (p.25-26).

Baseada na teoria de Piaget, Kamii (2002) diferencia *símbolos* e *sinais*: os primeiros apresentam semelhança com o objeto representado, podem ser inventados e originam-se no pensamento das pessoas. São exemplos de símbolos as figuras e as marcas de contagem. Os sinais, por sua vez, não lembram o objeto representado, são originados nas convenções sociais e, portanto, não podem ser inventados, como os números e outros sinais matemáticos.

Assim, seria incorreto dizer que o “+” representa a adição ou que o “2” em “23” representa “20”. Somos nós que utilizamos esses símbolos para representar e o fazemos nos nossos respectivos níveis de abstração.

A autora, relacionando representação e abstração, esclarece que “as crianças *representam* diferentes ideias em diferentes níveis de *abstração*” e, por isso, a criança que conserva (o número, por exemplo), o faz porque está em um nível de abstração mais elevado. Dessa forma, é contrária à ideia de que materiais concretos ou manipuláveis sirvam de base para o entendimento de sinais matemáticos, uma vez que, como símbolos (por exemplo, as fichas) que são, “a utilidade deles depende das relações que as crianças podem fazer, por meio de abstração construtiva” (Kamii, 2005, p.39).

Indagando sobre o significado do simbolismo numérico para a criança e se ela utiliza o grafismo numérico dentro de um contexto prático e explorando as defasagens entre o nível aparente dos conhecimentos e seu nível real de compreensão, Sastre e Moreno (1976) realizaram uma pesquisa “*Représentations Graphiques de la Quantité*”<sup>2</sup> na qual mostram a existência de grandes diferenças entre as condutas que a criança aprende espontaneamente, a partir da função estimuladora e reguladora de seu meio ambiente, e as condutas que ela aprende pela transmissão escolar.

Verificaram uma diferenciação progressiva do grafismo e uma evolução das condutas que caminham do desenho até a utilização do algarismo, concluindo que a evolução dessas condutas parece seguir uma linha genética clara.

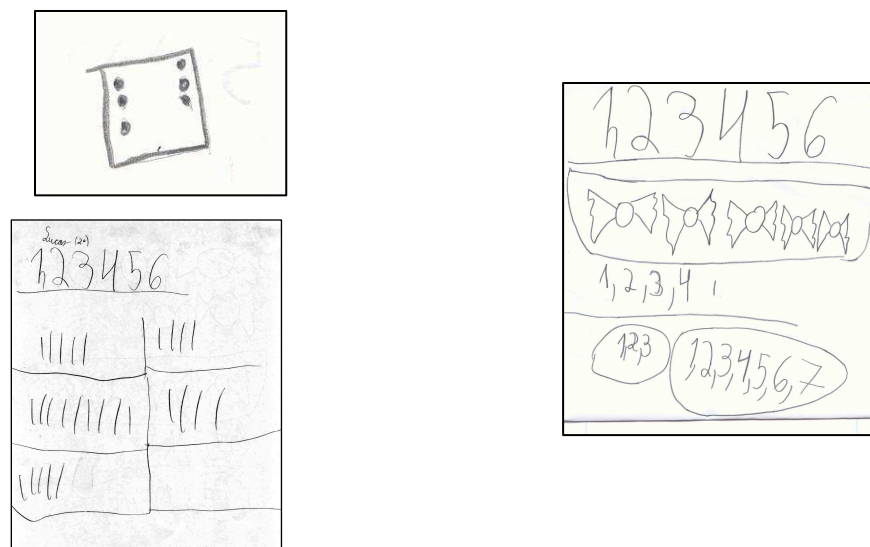
---

<sup>2</sup> Pesquisa realizada na Espanha, publicada originalmente no Bulletin de Psychologie de Université de Paris em 1976, traduzida por Carmen Scriptori de Souza e publicada nos anais do I Encontro Nacional de Professores do Proepre, em 1984.

Assim, no período intuitivo, a criança não usa o algarismo para identificar a igualdade de dois conjuntos, nem constrói um conjunto numericamente igual ao que lhe é apresentado; ela faz uma cópia figural, estabelecendo uma correspondência termo a termo entre os elementos. Nesse caso, ela está adotando um procedimento de representação original que, para as autoras, evidencia um sistema pessoal de representação no qual, primeiramente, o figural se distingue do quantitativo, enquanto este vai, pouco a pouco, sendo construído. Por volta dos dez anos de idade, segundo as autoras, a criança já utiliza o grafismo numérico de imediato, ou seja, nessa idade ela assimila o grafismo adulto ao seu próprio sistema quantitativo.

Molinari (2003), buscando verificar a existência de relações entre o nível de desenvolvimento cognitivo (operatoriedade) e as representações gráficas das quantidades numéricas, não encontrou relações de congruência entre esses dois elementos, o que a fez concluir que, as representações gráficas dependem de experiências pessoais e individuais e de sistemas próprios de representação.

Nesse estudo, foram realizadas atividades de representação gráfica de quantidades numéricas com crianças de ensino infantil e fundamental I e, foi verificada uma variação nas representações gráficas (para quantidades numéricas de bombons) de crianças que se encontravam em estágio pré-operatório, de transição e operatório concreto, como pode ser visto na Figura 1, a seguir:



**Figura 1. Representações de crianças entre 6 e 9 anos, para 6 bombons.**

Assim como houve uma evolução dos sistemas notacionais numéricos, ao longo da história da civilização, as crianças manifestam diferentes formas de representar graficamente os números, que evoluem das mais primitivas (desenhos globais) até a representação numérica (que requer um nível maior de abstração).

O estudo de Molinari (2003) confirmou a ideia, de Kamii (2005), de que, “quando as crianças representam suas ideias no papel, elas externalizam suas ideias em seus respectivos níveis de abstração” (p. 38). Portanto o significado, atribuído pelo sujeito, aos objetos, dependerá do nível estrutural do atribuidor.

Do ponto de vista da solução de problemas, a representação é antecipadora do fim a se atingir, “ela guia o sujeito na ação procedimental que este vai exercer sobre o real” (MORGADO, 1994, p.12). Assim, a representação é normalmente sujeita a reorganizações para uma construção mais adequada; ela vai sendo reelaborada ao longo da execução do problema (estratégias).

A representação é um elemento cognitivo diretamente relacionado à solução de problemas, uma vez que, para solucionar um problema, o indivíduo, após compreender o enunciado proposto, deverá elaborar uma representação da situação em questão.

Citando Morgado (1994), Fini (2001) esclarece que a representação mental é entendida como a organização e a compreensão da natureza semântica do problema; um quadro organizador de conhecimentos, atualizados através da atribuição de significado. “As crianças têm que construir uma representação das relações que existem entre os dados do problema e a representação de como, trabalhando com eles, podem obter novas informações e respostas à pergunta formulada ou a ser formulada” (p.70).

Assim, a solução de problemas, entendida como busca de estratégias ou alternativas para se atingir um fim, gera um processo de combinações entre vários elementos cognitivos, que precedem a representação, visto que esta irá permitir a transformação da informação linguística em informação matemática; a representação mental irá determinar a construção de um plano para a solução.

Morgado (1994) esclarece algumas funções da representação mental:

Na resolução de problemas, à construção de uma representação mental inicial incumbem duas funções. A primeira consiste em proporcionar, ao sujeito, uma compreensão, embora muitas vezes incompleta, ou mesmo incorreta, da situação geral, a qual o vai orientar na elaboração de um plano de ação. A segunda consiste

em apresentar, ao sujeito, uma visão antecipadora do fim a atingir sem a qual qualquer planificação procedimental se tornaria impossível de realizar [...] a representação mental inicial é, assim, normalmente sujeita a reorganizações que conduzem a uma construção mais adequada da mesma, uma vez que ela pode ser considerada verdadeira ou falsa. Assim, embora dependa, em última análise, dos níveis estruturais do sujeito, afina-se e reelabora-se ao longo da execução de um problema ou tarefa, podendo passar a conceder uma nova significação a um observável ou interpretar outro até aí considerado (MORGADO, 1994, p.12).

Assim, para verificar como as crianças representam graficamente a operação aritmética de divisão, em situações de solução de problemas aritméticos, Molinari (2010) solicitou a crianças de 4º e 5º anos do Ensino Fundamental, que solucionassem alguns problemas de divisão por quotas<sup>3</sup>.

Tais crianças eram solicitadas a utilizarem procedimentos espontâneos de solução, e após realizar esta atividade com vinte estudantes (10 do 4º e 10 do 5º ano), encontrou uma diversidade de procedimentos, tais como decomposição, algorítmico (multiplicação, chave breve, chave longa e algoritmo americano) e desenho, conforme pode ser visto nas figuras que se seguem:

1). Um grupo de alunos do 3º ano vai embalar brindes para a barraca de pescaria da festa junina da escola. Eles têm 1476 brindes e cada pacote deve ficar com 12 brindes. Quantos pacotes de brindes eles poderão embalar?

Figura 2. Representação de estudante de 4º ano (9,10) – Decomposição.

<sup>3</sup> Os problemas de divisão podem ser definidos como de dois tipos: *partição* e *quotição*. Em problemas de divisão partitiva, tem-se uma quantidade total que deverá ser distribuída por um número de partes predeterminado, devendo-se calcular o valor de cada parte. Em problema de divisão por quotas, tem-se a quantidade total e o valor de cada quota, devendo-se calcular a quantidade de quotas (CORREA, 1996 e NUNES et al., 2001).



1). Uma fábrica de brinquedos produz carretas em miniaturas. Nas carretas são colocadas 12 rodinhas e na fábrica há 168 rodinhas. Quantas carretas a fábrica poderá montar?

Handwritten work for Figure 3:

- Vertical subtraction:  $168 - 60 = 108$ ,  $108 - 48 = 60$ ,  $60 - 48 = 12$ ,  $12 - 12 = 0$ . Result: 14.
- Handwritten:  $168 \div 12 =$
- Grid of 12 boxes, each containing the digits 5, 5, 4 (representing 554).
- Other calculations:  $12 \times 12 = 144$ ,  $12 \times 14 = 168$ .

Figura 3. Representação de estudante de 4º ano (9,6) – Decomposição.

1). Um grupo de alunos do 3º ano vai embalar brindes para a barraca de pescaria da festa junina da escola. Eles têm 1476 brindes e cada pacote deve ficar com 12 brindes. Quantos pacotes de brindes eles poderão embalar?

Handwritten work for Figure 4:

- Long division:  $1476 \div 12 = 123$ .
- Check:  $12 \times 123 = 1476$ .
- Handwritten: "PROVA REAL", "123", "12x", "246", "123+", "1476".

Figura 4. Representação de estudante de 4º ano (9,11) – Chave longa.

2). Vários torcedores do "Clube do Futebol" pretendem alugar alguns ônibus para irem assistir a um jogo no Estádio do Morumbi. Os torcedores que pretendem ir são 756 e os ônibus disponíveis têm 42 lugares cada um. Quantos ônibus devem ser alugados?

Handwritten work for Figure 5:

- Long division:  $756 \div 42 = 18$ .
- Check:  $42 \times 18 = 756$ .
- Handwritten: "6", "42", "6x", "252", "756", "18", "R8 Devem ser alugados 18 Ônibus".

Figura 5. Representação de estudante de 5º ano (10,7) – Algoritmo americano.

2). No telhado da varanda de uma casa cabem fileiras com 45 telhas em cada uma. Foram utilizadas 1440 telhas ao todo. Quantas fileiras foram feitas neste telhado?

Figura 6. Representação de estudante de 5º ano (10,8) - Multiplicação.

2). Vários torcedores do "Clube do Futebol" pretendem alugar alguns ônibus para ir assistir a um jogo no Estádio do Morumbi. Os torcedores que pretendem ir são 756 e os ônibus disponíveis têm 42 lugares cada um. Quantos ônibus devem ser alugados?

Figura 72. Representação gráfica de estudante de 5º ano (10,8) - Desenho.

Como pôde ser observado, estas crianças manifestaram formas próprias de representação e todas se caracterizaram pela natureza numérica, porém, algumas se aproximam de representações icônicas. Embora uma variação nos procedimentos de solução tenha ocorrido, essas crianças reconheceram os problemas como de divisão.

As crianças precisam construir uma representação do problema para trabalhar com ele e, para tanto, dependendo do estágio do desenvolvimento em que elas se encontrem, faz-se necessária a intervenção do educador ou do psicopedagogo, no sentido de auxiliá-las a tomar consciência de suas ações.

Desta forma, acredita-se que as crianças devam ser incentivadas pelos educadores, ao emprego de procedimentos estratégicos mais espontâneos, compreendendo que, desta forma, elas tenham a oportunidade de construir suas representações e, conseqüentemente, maneiras mais elaboradas de solução de problemas, possibilitando que as mesmas avancem na aprendizagem da Matemática.

A representação gráfica constitui um processo individual no qual entram em jogo todas as ideias e vivências sociais das crianças. O fato leva-nos a concluir que as atividades de ensino, bem como a intervenção psicopedagógica devem ser planejadas e desenvolvidas considerando as particularidades das crianças, propondo-lhes situações nas quais sejam encorajadas a expor suas ideias, a expressar-se livremente e a buscar alternativas próprias para a solução de problemas.

## REFERÊNCIAS

CORREA, J. A compreensão inicial do conceito de divisão partitiva em tarefas não computacionais. In: *Coletâneas da Anpepp*, nº. 5, 151-165, 1996.

KAMII, C. *Crianças pequenas reinventam a aritmética: implicações da Teoria de Piaget*. Trad. Cristina Monteiro. 2 ed. Porto Alegre: Artmed, 2002.

KAMII, C. *Crianças pequenas continuam reinventando a aritmética (séries iniciais): implicações da Teoria de Piaget*. Trad. Vinicius Figueira. 2 ed. Porto Alegre: Artmed, 2005.

MOLINARI, A. M. C. *Representação e solução de problemas aritméticos de divisão: um estudo dos procedimentos de alunos do Ensino Fundamental I*. 253 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2010.

MOLINARI, A. M. C. *Estudo da relação entre a representação gráfica da quantidade e o desenvolvimento cognitivo*, 109 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.

MORGADO, L. M. A. *O ensino da aritmética: perspectiva construtivista*. Coimbra: Livraria Almedina, 1993.

MORGADO, L. M. A. O papel da representação mental na resolução de problemas. In *Anais do III Simpósio Internacional de Epistemologia Genética*, Resumos das Conferências. Águas de Lindóia, 1994.

NUNES, T. et al. As estruturas multiplicativas: avaliando e promovendo o desenvolvimento dos conceitos de multiplicação e divisão em sala de aula. In: *Introdução à Educação Matemática: os números e as operações numéricas*. 1 ed. São Paulo: Proem, 2001.

NUNES, T. et al. *Introdução à Educação Matemática: os números e as operações numéricas*. 1 ed. São Paulo: Proem, 2001.

PIAGET, J. *A formação do símbolo na criança: imitação, jogo e sonho, imagem e representação*. 3 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1990.

PIAGET, J. *Seis estudos de psicologia*. 23 ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1998.

PIAGET, J. *A Representação do Mundo na Criança*, Rio de Janeiro: Record, 1926.

SASTRE, G.; MORENO, M. *Représentations graphiques de la quantité*. Bulletin de Psychologie de l'Université de Paris, 30, 346-355, 1976.

SASTRE, G.; MORENO, M. *Descubrimiento y construcción de conocimientos*. Gedisa – Espanha – Barcelona, 1980.

TEIXEIRA, L. R. M. As representações da escrita numérica: questões para pensar o ensino e a aprendizagem. In: Moro, M. L. F. e Soares, M. T. C. *Desenhos, palavras e números: as marcas da matemática na escola*. Curitiba: Ed. da UFPR, 2005.