

O TRABALHO COM A DIVISÃO ARITMÉTICA NAS SÉRIES INICIAIS

Adriana Maria Corder Molinari

Laboratório de Psicologia genética – LPG/FE/Unicamp

Lia Leme Zaia

Laboratório de Psicologia genética – LPG/FE/Unicamp

Resumo:

Este artigo descreve o processo de construção da operação aritmética de divisão, e foi baseado em pesquisa realizada pela primeira autora com vinte estudantes do 4º e do 5º ano. Para verificar as representações dos estudantes, foram aplicados os seguintes instrumentos: a Prova de Multiplicação e de Divisão Aritmética para avaliar o nível da psicogênese da noção de multiplicação, seis problemas de divisão aritmética e entrevista semi estruturada, a fim de verificar as explicações das crianças a respeito dos procedimentos empregados na solução, bem como a noção de divisão construída. A análise qualitativo-quantitativa mostrou uma variação dos procedimentos de solução dos problemas em ambos os anos de escolaridade; evidenciou também a inexistência de uma relação necessária entre a complexidade do procedimento de solução e o ano de escolaridade, uma vez que procedimentos mais avançados foram encontrados entre estudantes do 4º ano, assim como procedimentos mais elementares, entre estudantes do 5º ano.

Palavras-chave: representação, representação gráfica, solução de problemas, divisão.

The work with the arithmetic division in first grade

This article describes the construction process of the arithmetic operation of division calculation, and was based on research undertaken by the first author with twenty students in the 4th and 5th grade. To check the students' representation, the following instruments have been used: the multiplication and arithmetic division calculation test to assess the level of psychogenesis of the multiplication notion, six problems of arithmetic division calculation and semi-structured interviews in order to check the children's explanations about the procedures used in the solution as well as the notion of constructed division calculation. The qualitative-quantitative analysis showed a variation of the procedures for solving problems in both grades of schooling, it has also highlighted the lack of a necessary relationship between the complexity of the solution procedure and the school grade, since more advanced procedures were found among 4th graded students and more elementary procedures among students in the 5th grade.

Keywords: representation, graph, problem solving, division calculation.

INTRODUÇÃO

Por tratar-se de uma estrutura mental construída individualmente, a partir da capacidade natural de pensar, o conhecimento matemático não pode ser aprendido unicamente a partir do ambiente externo.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997), documento do Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental, que orientam a elaboração de propostas de ensino para as escolas brasileiras, destacam dois aspectos básicos no ensino da Matemática: (1) que o aluno seja conduzido a estabelecer relações entre o que observa no mundo real e as representações disso e (2) a relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Salientam a importância da comunicação, orientando os educadores para que estimulem o aluno a "falar" e a "escrever" sobre Matemática e para que trabalhem, dentre outros recursos, as representações gráficas.

É importante lembrar que, em função dos níveis diferentes de abstração para se compreender os conceitos matemáticos, faz-se necessário considerar a relevância do papel da representação mental na construção de planos e de procedimentos direcionados à solução de problemas. A construção da representação mental desempenha papel importante na solução de problemas, uma vez que ela estabelece a relação entre a estrutura do pensamento e o procedimento, guiando o processo que conduz à solução.

Com base nesses aspectos, este trabalho tratou da descrição das representações gráficas de procedimentos de divisão aritmética, de crianças do 4º e do 5º anos do Ensino Fundamental I, durante o processo de solução de problemas aritméticos de divisão por quotas.

A divisão é uma operação de difícil compreensão pelas crianças e, de acordo com Correa (2006), "pouco ainda se sabe sobre as origens do entendimento inicial do conceito de divisão na criança" (p.185). Embora tal operação tenha origem nos esquemas de partilha, Correa, Nunes e Bryant (1998) afirmam que, quando partilham, as crianças não têm qualquer preocupação a não ser a igualdade das partes, enquanto o conceito de divisão "envolve a compreensão das relações entre os três valores, representados pelo dividendo, pelo divisor e pelo quociente" (p. 321).

Outra relação que as crianças precisam compreender é que quanto maior for o número a ser dividido (divisor), mantendo-se o dividendo constante, menor será o número final (quociente); quanto maior o dividendo, mantendo-se o divisor constante, maior será o quociente.

Enquanto na adição e na subtração estão envolvidos os esquemas de *juntar* e de *retirar*, respectivamente, na multiplicação e na divisão empregam-se os esquemas de *correspondência um a muitos* e de *distribuição*. (NUNES et al, 2001).

Nessa perspectiva, o ensino da Matemática deve tomar por base a coordenação entre os esquemas de ação, o raciocínio desenvolvido dentro ou fora da sala de aula e as representações matemáticas.

Os problemas de divisão, adotados como instrumentos a serem aplicados neste estudo, abrangeram a *divisão por quotas*, porque, ao contrário da *divisão partitiva*, ela envolve termos relacionais¹ que podem ser melhor compreendidos pelas crianças que ainda apresentam dificuldades em realizar cálculos numéricos com a divisão.

A diferença básica entre a divisão partitiva e a divisão por quotas é que, nesta, “a criança precisa descobrir quantas vezes uma determinada quantidade está contida na quantidade maior”, enquanto, na partitiva “a criança deve repartir uma determinada quantidade em dado número de quotas equivalentes”. (CORREA, 2006, p.185-186).

Conforme Nunes et al. (2001), nos problemas de divisão por quotas ou problema inverso, como denominam as autoras, a estratégia de solução adotada pelos alunos é a mesma adotada em problemas de multiplicação, nos quais são utilizados os esquemas de *distribuição* e de *correspondência um-a-muitos*.

A capacidade de resolver problemas utilizando os sistemas convencionais, as técnicas e os exercícios empregando o algoritmo², não assegura que a criança tenha compreendido o verdadeiro significado da operação; da mesma forma, conhecer os símbolos convencionais não é suficiente para que a criança utilize essas grafias e, conseqüentemente, o procedimento convencional de cálculo de maneira apropriada. Esse conhecimento deve ser combinado com outros procedimentos que permitam a compreensão e a utilização dos sistemas convencionais de representação para se chegar à solução do problema.

¹ Os problemas de divisão por quotas demandam maior compreensão da relação inversa – a multiplicação entre quociente e divisor para se chegar ao valor do dividendo – podendo ser solucionados pela operação multiplicativa.

² Algoritmo é uma indicação precisa e delimitada sobre quais operações realizar e em qual seqüência resolver qualquer problema de um determinado tipo. Um algoritmo é uma generalização, desde que seja aplicável a todos os problemas de um determinado tipo. Uma das características da matemática é a qualidade algorítmica de muitos de seus problemas. (KRUTESTSKII, 1976, P.46).

A criança pode usar várias formas de representação gráfica, assim como os adultos utilizam vários tipos de notações em sua vida cotidiana: na marcação de pontuações de jogos, nos procedimentos de etiquetagem ou na confecção de listas de compras, por exemplo. No entanto, como dito anteriormente, é preciso que ela compreenda que as técnicas utilizadas convencionalmente nas soluções de problemas envolvem um conjunto de regras criadas pelo homem e é fundamental que entenda a natureza do signo numérico, dos símbolos matemáticos e de que maneira eles são combinados para representar os problemas matemáticos. Quando existe domínio desses aspectos, a criança terá possibilidades de passar a operar com as quantidades no papel, de forma sistemática. (MOURA, 1992).

Morgado (1994), estudando as representações durante a solução de problemas, afirmou que a busca de estratégias para a solução do problema, após a interpretação do enunciado, leva o indivíduo a criar uma representação mental do problema, pois “é ela que conduz e determina a solução” (p.19).

Representação gráfica da divisão

Compreender e interpretar os sistemas de representação tem indagado diversos estudiosos do desenvolvimento humano, especialmente aqueles que se interessam pelo desenvolvimento cognitivo.

Olivier, Murray e Human (1991), buscando descrever e analisar as estratégias de solução de problemas de divisão, em crianças norte-americanas entre 5 e 9 anos de idade, por meio da observação e da interação social, afirmaram que as crianças inventam “poderosos algoritmos” em detrimento dos algoritmos ensinados na escola; quando é permitido, elas preferem usar seus próprios algoritmos, atingindo uma taxa de sucesso significativamente maior do que quando usam algoritmos-padrão.

As estratégias de solução encontradas pelos autores foram: *representação direta* — desenho das ações necessárias à solução; *representação numérica* — uso de algarismos sem emprego da operação, com estimativa repetida (ensaio e erro) e estimativa por ajuste (estimando pelos restos); *subtração*; *adição* — *multiplicação* e *transformação* (realizando vários “arranjos” com os números, por exemplo: $4158 \div 11$

$$300 \times 11 = 3300 \quad \text{e} \quad 78 \times 11 = 858 \quad / \quad 3300 + 858 = 4158$$

Verificaram que, mesmo as crianças mais novas, utilizam estratégias sofisticadas de solução para operar com números maiores e não encontram dificuldades em operar em problemas de divisão partitiva e por quotas, sugerindo que o ensino da divisão deve se basear em problemas com enunciados (*word problems*).

Os autores concluíram, refutando Fischbein et al (1985), que as crianças mais novas podem resolver, tanto problemas de partição como de quotição, intuitivamente, antes de qualquer instrução formal.

Lautert e Spinillo (1999), procurando verificar, por meio de problemas verbais, quais os elementos da operação de divisão (termos e procedimentos) são representados por crianças de 5 a 9 anos de idade e a forma de representá-los, encontraram algumas categorias de grafismos, baseadas em Hughes (1986): *idiossincrática*, grafismos irregulares, sem relação com a operação; *icônica*, sinais gráficos (traços, riscos etc.), relacionados às quantidades envolvidas; *simbólica*, símbolos convencionais, e *mista*.

Em relação aos termos da divisão representados, as autoras identificaram uma tipologia de condutas: *tipo 1* - sem relação com as quantidades; *tipo 2* - relacionadas ao enunciado, mas sem tentativa de solução; *tipo 3* - com solução por meio de outras operações e *tipo 4* - solução através da divisão, tipificando-se as do grupo 3 e 4 como mais evoluídas que as do 1 e 2.

Em seu estudo, as autoras concluíram que a relação entre os grafismos e os procedimentos de solução é influenciada pela instrução e que as crianças menores representaram o que foi dito, enquanto as mais velhas tendem a representar os procedimentos de solução.

Starepravo e Moro (2005), realizaram um estudo, com crianças de 3ª série, sobre os procedimentos de solução escrita de problemas de compra, envolvendo multiplicação e divisão, propostos oralmente e com o apoio de encartes ilustrativos e ofertas, sem que os estudantes fossem informados de que se tratava de uma atividade de solução de problemas. As autoras analisaram a antecipação da solução, a produção da notação e a interpretação que as crianças deram às suas notações.

Verificaram que as antecipações se manifestaram em diferentes níveis: da antecipação do procedimento à antecipação do resultado por cálculo mental. Algumas podem ser classificadas como estimativas de conteúdo qualitativo, mais presentes na multiplicação;

outras, de conteúdo quantitativo, mais presentes na divisão (nas últimas, em geral, as crianças usaram resultados de um problema anterior).

Algumas crianças antecipam a operação, mas não o procedimento; outras antecipam o procedimento e outras, ainda, antecipam o resultado por cálculo mental.

No entanto, a antecipação do procedimento a utilizar não ocorreu nos problemas de divisão, levando as autoras a entenderem que esses problemas são mais difíceis do que os da multiplicação e a atribuírem isso ao fato de:

Na multiplicação, a relação com a adição ser bastante forte para as crianças e a ação de repetição ser mais facilmente representada mentalmente [...]. Já a divisão [...] parece trazer uma dupla dificuldade para as crianças: primeiro a operação não mantém a mesma relação direta com a adição; segundo, exige uma inversão no raciocínio multiplicativo. (MORO e STAREPRAVO, 2005, p. 120).

Nesse estudo, as notações encontradas eram, em sua maioria, “diferentes das ensinadas na escola”, creditando-se isso ao fato de serem problemas apresentados oralmente, deixando as crianças mais livres para representá-los. As notações variaram entre notações de adição, de multiplicação, de subtração e combinadas, predominando a aditiva nos dois tipos de problemas (multiplicação e divisão). Nos problemas de divisão por quotas, as crianças adicionavam valores unitários até obterem o valor do dividendo.

As autoras observaram que, em problemas de divisão, os procedimentos de solução eram construídos durante o processo de produção da notação; por outro lado, que a notação de divisão aparecia apenas como representação do problema, resolvido pela multiplicação.

As interpretações que essas crianças deram às suas notações foram de conteúdo explicativo (relatando os passos do algoritmo convencional) e de conteúdo avaliativo (fazendo novas tentativas de solução, quando percebiam o emprego de um procedimento inadequado), levando as autoras a concluir que os problemas devem ser usados como situação de aprendizagem e devem ser apresentados antes do ensino das técnicas operatórias.

Selva (2003), procurando investigar o uso de estratégias em solução de problemas de divisão com material concreto (fichas ou lápis e papel), comparou o desempenho de crianças entre 6 e 8 anos de idade e constatou o seguinte: que os melhores desempenhos foram os de crianças das séries mais avançadas e que o maior índice de acerto ocorreu nos grupos que tinham algum material para utilizar como apoio.

As estratégias empregadas pelas crianças desse estudo variaram entre representações concretas (com as fichas), representações gráficas (com lápis e papel) e cálculo mental (sem

material) e foram categorizadas da seguinte forma:

- 1). Representação direta com distribuição de pequenas quantidades — uso da correspondência um-a-um, ou separação dos elementos em grupos de 2 ou 3;
- 2). Representação direta com formação de grupos (característica de problemas de quotição) — a criança contava fichas ou desenhava marcas em quantidade correspondente ao valor do dividendo, formando grupos com a quantidade indicada pelo valor do divisor (circulando os grupos quando usavam lápis e papel);
- 3). Ensaio e erro (mais frequente em problemas de partição e com o uso de lápis e papel) — a criança escolhia várias vezes certo número de elementos para constituir cada grupo, contando o total até chegar ao valor do dividendo, também caracterizado pelo desenho de conjunto de bolinhas;
- 4). Repetição aditiva, incluindo tanto a repetição aditiva como a repetição subtrativa;
- 5). Uso imediato de fatos conhecidos, envolvendo multiplicações ou divisões, podendo indicar a memorização da tabuada ou uma compreensão da divisão.

A autora concluiu que a representação direta é mais frequente nas séries mais adiantadas e o uso de objetos de apoio é mais recorrente nas crianças pequenas, mas que objetos concretos que representem numericamente as quantidades podem inibir o emprego de estratégias mentais mais sofisticadas e, sozinhos, não têm quase nenhuma utilidade.

Borba e Selva (2006) investigaram o desempenho de crianças de 3^a e 5^a séries em problemas de divisão com resto diferente de zero, com o objetivo de investigar o efeito de significados atribuídos à divisão e de representações simbólicas na solução de problemas.

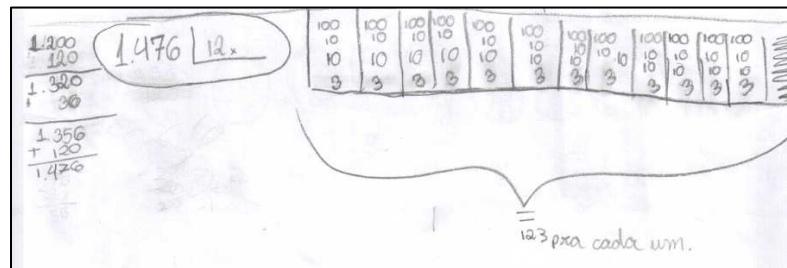
Os resultados da pesquisa dessas autoras foram que, das crianças de 3^a série, 69% apresentaram representações pictográficas, através de desenhos, enquanto 31% apresentaram representações algorítmicas ou heurísticas. Na 5^a série, 19% foram representações pictográficas ou por desenho, 69% foram representações algorítmicas e 12% algorítmicas e heurísticas. Ou seja, o algoritmo formal foi mais utilizado pelas crianças da 5^a série.

Algumas crianças utilizavam mais de uma forma de representação, o que, na opinião das autoras, “pode auxiliar na resolução de problemas” (p.11), como, por exemplo, usar o algoritmo para resolver um problema de divisão e depois definir o tratamento do resto da divisão por meio de desenhos. Isso, segundo as autoras, pode constituir uma estratégia de solução eficiente.

Observou-se que a maioria dos alunos das duas séries utilizou estratégias adequadas (na partição e na quotição), evidenciando que compreendem igualmente problemas com esses dois significados, apesar de utilizarem procedimentos variados de solução. Além disso, percebeu-se que as crianças dão tratamento ao resto da divisão, de forma independente do tipo de problema, porém, de maneira inadequada, sugerindo que a escola deve trabalhar mais cuidadosamente com esse aspecto, estimulando o uso de estratégias variadas — algorítmicas ou não — mas sempre baseadas na compreensão.

No estudo de Molinari (2010), para verificar como as crianças representam graficamente a operação aritmética de divisão, em situações de solução de problemas aritméticos, a pesquisadora solicitou, a crianças de 4º e 5º anos do Ensino Fundamental, que solucionassem, da maneira como julgassem melhor, alguns problemas de divisão por quotas. Neste trabalho, foram encontradas 9 categorias de procedimentos, denominados da seguinte maneira:

1. DEC = decomposição. A criança faz estimativa decompondo o dividendo em partes iguais (divisor), fazendo ajustes com os restos da divisão;



2. ACB = algoritmo com chave breve. A criança resolve o problema, utilizando o procedimento convencionalmente conhecido como processo breve da divisão;

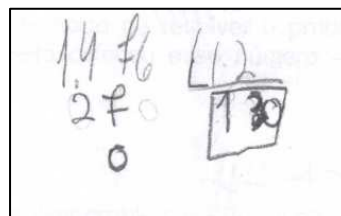


Figura 2. Representação de estudante do 4º ano (erro no resultado).

2. ACL = algoritmo com chave longa. A criança resolve o problema utilizando o procedimento convencionalmente conhecido como processo longo da divisão;

1). Em uma cesta estão 252 bombons e eu preciso colocá-las em embalagens com capacidade para uma dúzia de bombons. Quantas embalagens ficarão completas?

$$\begin{array}{r} 252 \overline{)12} \\ \underline{12} \\ 02 \\ \underline{02} \\ 00 \end{array}$$
 R: Ficarão completas 21 embalagens

Figura 3. Representação de estudante do 5º ano.

4. AA = algoritmo americano. A criança resolve o problema utilizando o procedimento convencionalmente conhecido como algoritmo americano, que também envolve estimativa (processo que se assemelha mais à ideia da divisão);

2). Vários torcedores do "Clube do Futebol" pretendem alugar alguns ônibus para irem assistir a um jogo no Estádio do Morumbi. Os torcedores que pretendem ir são 756 e os ônibus disponíveis têm 42 lugares cada um. Quantos ônibus devem ser alugados?

$$\begin{array}{r} 756 \overline{)42} \\ \underline{420} \\ 236 \\ \underline{252} \\ 084 \\ \underline{84} \\ 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \times \\ \underline{6x} \\ 252 \end{array}$$
 R: Devem ser alugados 18 ônibus

Figura 4. Representação de estudante do 5º ano.

5. AM = algoritmo da multiplicação. A criança emprega procedimentos multiplicativos, ou seja, resolve o problema empregando o algoritmo da multiplicação;

2). No telhado da varanda de uma casa cabem fileiras com 45 telhas em cada uma. Foram utilizadas 1440 telhas ao todo. Quantas fileiras foram feitas neste telhado?

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 30 \\ \hline 00 \\ 1350 \\ \hline 1350 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 33 \\ \hline 135 \\ 1350 \\ \hline 1485 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 32 \\ \hline 90 \\ 1350 \\ \hline 1440 \end{array}$$

Figura 5. Representação de estudante do 5º ano.

6. AAd = algoritmo adição. A criança emprega a operação de adição, para solucionar o problema;

3). Pedro estava doente e seus pais resolveram levá-lo ao médico. O doutor Paulo receitou uma caixa de remédio que continha 28 comprimidos. E pediu que ele tomasse 4 comprimidos por dia. Sabendo que Pedro precisa tomar toda a caixa de remédio, quantos dias seu tratamento vai durar? *32 dias*

$$\begin{array}{r} 28 \\ + 4 \\ \hline 32 \end{array}$$

Figura 6. Representação de estudante do 4º ano (erro de procedimento).

7. ASb = algoritmo subtração. A criança emprega a operação de subtração, para solucionar o problema;

1). Uma fábrica de brinquedos produz carretas em miniaturas. Nas carretas são colocadas 12 rodinhas e na fábrica há 168 rodinhas. Quantas carretas a fábrica poderá montar?

$$\begin{array}{r} 168 \\ - 12 \\ \hline 156 \end{array} \quad \begin{array}{r} 156 \\ + 12 \\ \hline 168 \end{array}$$

Poderia ser montadas 156 carretas

Figura 7. Representação gráfica de estudante do 4º ano – erro de procedimento.

8. CM = cálculo mental. A criança resolve o problema por cálculo mental e registra o resultado;

2). Um grupo de crianças vai jogar com 75 fichas e cada criança terá que receber 15 fichas. Quantas crianças poderão jogar este jogo?

5 crianças

Figura 8. Representação de estudante do 4º ano.

9. DES = desenho. A criança vale-se do desenho (representação icônica), associado à representação numérica.

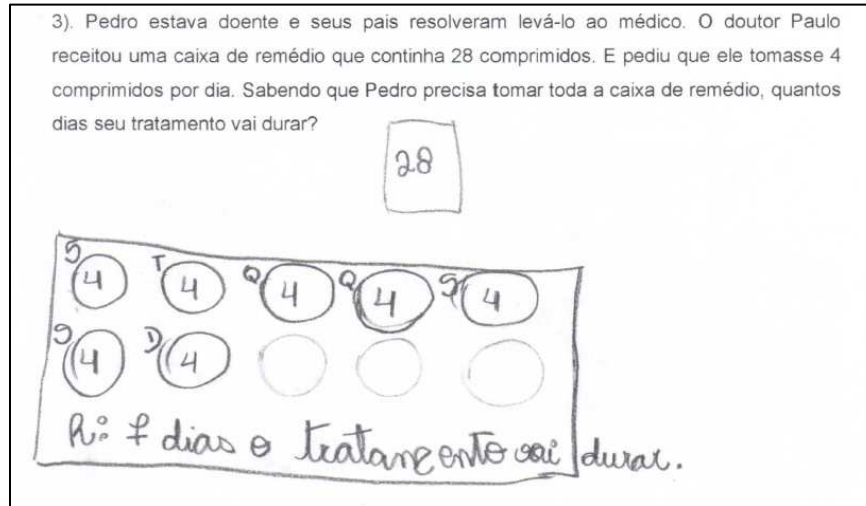


Figura 9. Representação gráfica de estudante do 4º ano.

Estas crianças manifestaram formas próprias de representação e todas caracterizaram-se pela natureza numérica, embora algumas se aproximassem de representações icônicas (Figura 9).

Algumas utilizaram a decomposição e outras, procedimentos algorítmicos, mas que levam ao resultado correto demonstrando, assim, que não há uma forma única de se resolver problemas.

Outro fator importante para o processo de solução de problemas, que precisa ser destacado, é que embora tenha ocorrido uma variação nos procedimentos de solução, essas crianças reconheceram os problemas como de divisão.

As crianças precisam construir uma representação do problema para trabalhar com ele e, para tanto, dependendo do estágio do desenvolvimento em que se encontrem, faz-se necessária a intervenção do educador no sentido de auxiliá-la a tomar consciência de suas ações.

Desta forma, acredita-se que, as crianças devam ser incentivadas pelos educadores a empregarem procedimentos estratégicos mais espontâneos, compreendendo que, desta forma, elas tenham a oportunidade de construir suas representações e, conseqüentemente, maneiras mais elaboradas de solução de problemas, possibilitando que as mesmas avancem na aprendizagem da Matemática.

A representação gráfica constitui um processo individual no qual entram em jogo todas as ideias e vivências sociais das crianças. Esse fato leva-nos a concluir que as atividades de ensino, bem como a intervenção pedagógica, devem ser planejadas e desenvolvidas considerando as particularidades das crianças, propondo-lhes situações nas quais sejam encorajadas a expor suas ideias, a expressar-se livremente e a buscar alternativas próprias para a solução de problemas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CORREA, J. A compreensão inicial do conceito de divisão partitiva em tarefas não computacionais. In: **Coletâneas da Anpepp**, nº. 5, 151-165, 1996.
- GRANELL, C.G. (1983). Procesos cognoscitivos en el aprendizaje de la multiplicación. In: MORENO, Montserrat et al. **La Pedagogía Operatoria: un enfoque constructivista de la educación**. Barcelona: Laia.
- KAMII, C. **Crianças pequenas continuam reinventando a aritmética** (séries iniciais): implicações da Teoria de Piaget. Trad. Vinicius Figueira. 2 ed. Porto Alegre: Artmed, 2005.
- KAMII, C. **Crianças pequenas reinventam a aritmética**: implicações da Teoria de Piaget. Trad. Cristina Monteiro. 2 ed. Porto Alegre: Artmed, 2002.
- LAUTERT, S. L. e SPINILLO, A. G. (1999). Como crianças representam a operação de divisão: da linguagem oral para outras formas de representação. **Temas em Psicologia**. 7(1), 23-36.
- LAUTERT, S. L. e SPINILLO, A. G. (2002). As relações entre o desempenho em problemas de divisão e as concepções de crianças sobre a divisão. **Psicologia: Teoria e Pesquisa**. 18(3), 237-246.
- MOLINARI, A. M. C. **Estudo da relação entre a representação gráfica da quantidade e o desenvolvimento cognitivo**, 109 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.
- MOLINARI, A. M. C. **Representação e solução de problemas aritméticos de divisão**: um estudo dos procedimentos de alunos do Ensino Fundamental I. 253 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2010.
- MORGADO, L. M. A. **O ensino da aritmética**: perspectiva construtivista. Coimbra: Livraria Almedina, 1993.
- MORGADO, L. M. A. O papel da representação mental na resolução de problemas. In **Anais do III Simpósio Internacional de Epistemologia Genética**, Resumos das Conferências. Águas de Lindóia, 1994.
- MORO, M. L. e CARNEIRO, M. T. (2005) (orgs.). **Desenhos, Palavras e Números**: as marcas da matemática na escola, Curitiba, PR: Editora UFPR.
- MOURA, M. O. de (1992). O jogo e a construção do conhecimento matemático. **Idéias**, vol. 10. p. 45-53.
- NUNES, T. et al. As estruturas multiplicativas: avaliando e promovendo o desenvolvimento dos conceitos de multiplicação e divisão em sala de aula. In: **Introdução à Educação Matemática**: os números e as operações numéricas. 1 ed. São Paulo: Proem, 2001.

NUNES, T. et al. **Introdução à Educação Matemática:** os números e as operações numéricas. 1ed. São Paulo: Proem, 2001.

OLIVIER, A., MURRAY, H. and HUMAN, P. (1991). Children's solution strategies for division problems. In Underhill, R.G. Proceedings of the thirteenth annual meeting. **North american chapter of the psychology of mathematics education**, vol.2. VA (Virginia Tech).

PIAGET, J. **A formação do símbolo na criança:** imitação, jogo e sonho, imagem e representação. 3 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1990.

PIAGET, J. **A Representação do Mundo na Criança**, Rio de Janeiro: Record, 1926.

PIAGET, J. **Seis estudos de psicologia**. 23 ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1998.

SASTRE, G.; MORENO, M. **Descubrimiento y construccion de conocimientos**. Gedisa – Espanha – Barcelona, 1980.

SASTRE, G.; MORENO, M. **Représentations graphiques de la quantité**. Bulletin de Psychologie de l'Université de Paris, 30, 346-355, 1976.

SELVA, A.C.V. (2003). Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas de divisão. In: Schliemann, Analúcia e Carraher, David (orgs.) (1998). **A compreensão de conceitos aritméticos:** ensino e pesquisa. Campinas – SP: Papirus. (Perspectivas em educação matemática).

SELVA, A.C.V. e BRANDÃO, A.C.P. (2000). A notação escrita na resolução de problemas por crianças pré-escolares. **Psicologia: Teoria e Pesquisa**. 16(3), 241-249.

SINCLAIR, A.; SIEGRIST, F.; SINCLAIR, H. Yong children's ideas about the written number systems. In: ROGERS, D. E.; SLOBODA, J.A. **The Acquisition of Symbolic Skills;** NATO Conference Series III, Human factors; v. 22; New York: Plenum, 1983.

STAREPRAVO, A. R. e MORO, M. L. F.(2005). As crianças e suas notações na solução de problemas de multiplicação. In: Moro, M. L. F. e Soares, M. T. C. **Desenhos, palavras e números:** as marcas da matemática na escola. Curitiba: Ed. da UFPR.