



EXPLORANDO A CONSTRUÇÃO COMPUTACIONAL DE SINAIS PERIÓDICOS CONTÍNUOS COMO COMBINAÇÃO LINEAR DE SINAIS SENOIDAIS HARMONICAMENTE RELACIONADOS

Tetsuo Araki

t_araki@ig.com.br

Centro Universitário Padre Anchieta

Mario Mollo Neto

mariomollo@gmail.com

Universidade Paulista – UNIP/SP

Centro Universitário Padre Anchieta

RESUMO

Esta pesquisa pretende, na exploração da bibliografia e na correspondente prospecção e identificação das unidades curriculares do curso de Engenharia Eletrônica que apresentam pré-requisitos quanto ao conhecimento de séries de *Fourier*, buscar sua exploração como uma alternativa didática para o ensino, de forma a integrar e alinhar o discurso e a maneira de abordagem com o mesmo formalismo para a transmissão de conhecimentos aos discentes. Exemplos foram abordados durante a pesquisa, que são fundamentais para destacar, tanto para os docentes quanto para os discentes, a importância do conhecimento da correta aplicação do desenvolvimento das séries nesta área de conhecimento, buscando uma forte contextualização para a confirmação da sua aplicação em situações práticas do dia a dia, motivando assim os alunos a se aprofundarem nos estudos correspondentes. Explorou-se, ainda, resultados de simulações computacionais que apontam para um menor erro de aproximação quando ao realizar a expansão dos termos da série de *Fourier* e as mesmas permitem visualizar que a pesquisa, simulação e o cálculo com suporte computacional é uma importante ferramenta para promover um suporte preditivo aos estudantes e projetistas de sistemas eletrônicos digitais.

Palavras chaves: Ensino de Séries de *Fourier*, Convergência, Cálculo computacional.

ABSTRACT

This research aims at exploring the literature and the corresponding exploration and identification of courses of Electronic Engineering that have prerequisites as knowledge of Fourier series, pursue its exploration as an alternative to didactic teaching, in order to integrate and align speech and the way to approach the same formalism for the transmission of knowledge to students. Samples were covered during the survey, which are key to highlight both for the teachers and for the students, the importance of knowledge of the correct implementation of the development of the series in this area of knowledge, seeking a strong context for the confirmation of their application in practices situations of

everyday life, thus motivating students to go deeper in the corresponding studies. Was explored, yet, results of computer simulations that show a lower approximation error when to carry out the expansion of the terms of the Fourier series and allow the same view that research, simulation and calculation with computational support is an important tool to promote a predictive support to students and designers of digital electronic systems.

Keywords: Teaching Fourier series, convergence, computational calculation.

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa aborda a representação da Série *de Fourier* do ponto de vista didático, procurando explorá-lo como uma alternativa para o direcionamento do ensino de séries no curso superior de Bacharelado em Engenharia Eletrônica do Centro Universitário Padre Anchieta de Jundiaí/SP nas unidades curriculares que demandam esta ferramenta no transcorrer de seus conteúdos programáticos.

A principal motivação vem das dificuldades do aprendizado apresentado pelos discentes nas disciplinas de cálculo, fundamentais para o bom desenvolvimento das atividades do curso de engenharia.

Segundo Godoy e Faria (2012), para isto, é preciso avaliar o currículo do curso *versus* as práticas docentes. Estreitar as relações entre as disciplinas do ciclo básico ao profissionalizante como forma de motivar a aquisição dos conhecimentos, que muitas vezes podem parecer supérfluos e sem aplicações para seu desenvolvimento no curso e na carreira profissional. Isto ainda se deve, segundo os mesmos autores, como sendo uma consequência das justificativas dos insucessos invariavelmente atribuídos à falta de conhecimentos oriundos dos ensinamentos fundamental e médio, o que se completa com o discurso da falta de hábito de estudo dos novos alunos.

Parece, portanto, evidente que qualquer solução para o ensino do Cálculo passa por uma integração entre professores dos ciclos básico, específico e até o profissional do curso, por um entendimento das necessidades, expectativas e formação anterior dos alunos e por práticas adequadas dos professores de engenharia (MELLO *et al.*, 2000).

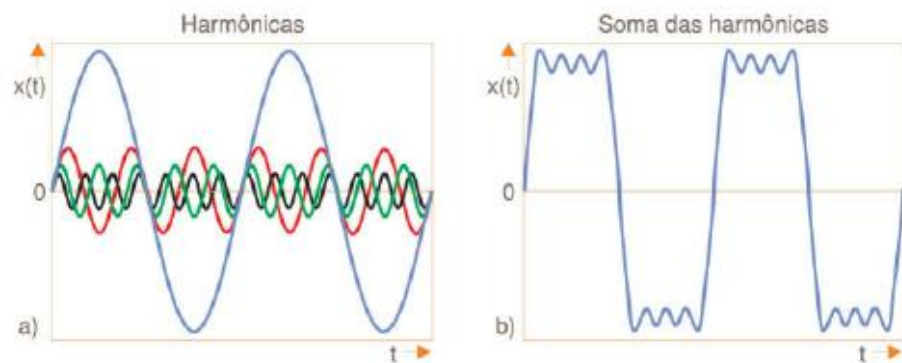
Considerando estas colocações, serão prospectados no transcorrer deste estudo os conteúdos disponibilizados no Projeto Pedagógico do Curso na busca de unidades curriculares que tenham alguma relação destes conteúdos e o desenvolvimento de atividades que demandem conhecimentos da transformada de *Fourier* em busca de pré-requisitos específicos.

A transformada de *Fourier* constitui-se, provavelmente, na principal ferramenta matemática do engenheiro eletrônico/eletricista e desempenha importante papel em diversas áreas, desde comunicações, processamento de sinais, sistemas de controle, antenas, além de ser extremamente útil na resolução de problemas de valor de contorno em Equações Diferenciais Parciais, que se aplicam a muitos fenômenos que ocorrem na Ótica, Eletricidade, Ondulatória, Magnetismo, Mecânica, e outras áreas do conhecimento, que podem ser descritos através de uma equação diferencial parcial (TONIDANDEL e ARAÚJO, 2012).

Os mesmos autores dizem que, no projeto de sistemas de controle, por exemplo, o engenheiro usualmente deseja avaliar os efeitos de resposta do sistema mediante uma excitação em sua entrada e frequentemente lança mão de ferramentas como a função degrau unitária $u(t)$ e de transformadas como as de *Fourier* e *Laplace*. Isto porque ao conhecer a resposta de um sistema a uma entrada do tipo degrau [ou impulso], é possível determinar imediatamente a resposta do sistema a uma entrada $x(t)$ arbitrária. Elas permitem modelar o comportamento do sistema no domínio da frequência mediante suas funções de transferência.

Sabe-se ainda, que as funções senoidais são muito frequentes nos estudos de eletricidade e da eletrônica, com destaque aos estudos das telecomunicações, assim como em muitos dos campos da engenharia, mas, além disso, funções não senoidais, periódicas, podem, em condições muito gerais, ser colocadas como somas de parcelas senoidais, por meio da série de *Fourier* (YARO e LYRA, 2006).

De acordo com informações de Capelli (2011), a análise espectral e a análise de sinais no domínio do tempo também são muito importantes para a área da engenharia eletrônica e elétrica, pois um sinal puro pode gerar infinitas harmônicas. Dependendo da amplitude e da ordem dessas harmônicas, elas podem acabar por se sobrepor ao sinal fundamental, distorcendo sua forma de onda (Figura 1). Nesta temos ainda um comparativo da natureza do sinal em relação à faixa de frequência que suas harmônicas podem atingir. Segundo o mesmo autor, os domínios do tempo e da frequência podem ser relacionados entre si através da transformada de *Fourier*. Esta transformada calcula, fisicamente, o espectro das frequências de um sinal através de uma análise contínua e infinita no tempo e, segundo o autor, isto é impossível em tempo real.



Sinal de áudio, f máx @ 20 kHz fh até 1 MHz
 RF, f máx = vários MHz fh acima de 3 GHz
 Microondas, vários MHz até Ghz fh acima de 40 GHz.

Figura 1. Sinal senoidal deformado pelas harmônicas e o comparativo da natureza do sinal em relação à faixa de frequência. Fonte: (CAPELLI, 2011).

Esta pesquisa aborda o desenvolvimento de procedimentos didáticos e exemplos práticos utilizados para a construção e a representação de sinais como combinações lineares de um conjunto de sinais básicos, focando a representação dos sinais periódicos de tempo contínuo com a série de *Fourier*.

Segundo Oppenheim e Willsky (2010) é vantajosa a representação de sinais como combinações lineares de sinais básicos que possuam as seguintes propriedades:

- O conjunto de sinais básicos pode ser usado para construir uma classe ampla e útil de sinais;
- A resposta de um sistema com sinais periódicos de tempo contínuo, para cada sinal, deve ser simples o suficiente na sua estrutura para fornecer com uma representação conveniente, a resposta a qualquer sinal construído como uma combinação linear dos sinais básicos.

Levando em consideração as abordagens das referências acima destacadas, nesta pesquisa, será realizado também um experimento em que se aplicará a ferramenta de *software* da Matworks (2013), o MATLAB[®] em sua versão 6.1 para simular o comportamento de um conjunto de códigos para a obtenção de uma onda quadrada e aproximá-la por meio da soma de parcelas senoidais, por meio da série de *Fourier*, a fim de permitir uma melhor visualização, no exemplo proposto, entre a aproximação adotada e a função real.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Dificuldades no Ensino de Cálculo:

Segundo Rezende (2008), um dos grandes desafios no ensino superior ainda é, sem dúvida, o tão propalado “fracasso no ensino de Cálculo”. Destacando que, se investigarmos a origem histórica de tal “fracasso”, verificaremos que este tem início desde o momento em que se começa a ensinar Cálculo.

Diante dessa crise de identidade do ensino de Cálculo, destaca o mesmo autor, que se faz urgente redimensionar o paradigma de ensino de Cálculo: nem a preparação para um ensino posterior de Análise e nem a “calculeira desenfreada” servem como meta para um curso de Cálculo; precisa-se voltar o ensino do Cálculo para o próprio Cálculo, os seus significados, os seus problemas construtores e suas potencialidades. Tão importante quanto saber usar as regras de derivação e as técnicas de integração, é saber os seus significados, as suas múltiplas interpretações, sua utilidade em outros campos e em outras áreas do conhecimento.

No trabalho de Godoy e Faria (2012) realizou-se uma varredura no currículo do curso de engenharia elétrica, desenvolvendo uma metodologia que permite avaliar os conteúdos das unidades curriculares buscando pré-requisitos, necessários à aquisição dos conhecimentos referentes à necessidade da aplicação das séries a cada disciplina. Após, para a complementação dos resultados, foram realizadas entrevistas com os docentes para a detecção mais específica destes pré-requisitos.

A Série de *Fourier*:

Segundo Sodré (2003), *Jean B. Fourier* (1768-1830) no livro “*Théorie Analytique de la Chaleur*”, escrito em 1822, introduziu o conceito conhecido atualmente como Série de *Fourier*, que é muito utilizado nas ciências em geral, principalmente nas áreas envolvidas com: Matemática, Engenharia, Computação, Música, Ondulatória, Sinais Digitais, Processamento de Imagens, e outros.

A ideia central do trabalho de *Fourier* era a hipótese fundamental de que, satisfeitas certas condições, uma função pode ser representada por uma série, em que cada parcela desta série é uma combinação linear das funções trigonométricas seno e cosseno, cujos coeficientes são chamados de coeficientes de *Fourier*. Esta ideia não foi aceita de imediato; no entanto, mais tarde, com as contribuições de *Dirichlet*, foi possível estabelecer as condições de convergência das séries de *Fourier* (OURIQUE, 2010).

Assim, *Fourier*, com toda a sua genialidade, mostrou que toda função periódica pode ser representada por uma série de senos e cossenos com amplitudes, fases e períodos específicos, ou seja, por série trigonométrica com maior facilidade de visualização e manipulação.

Mas, antes de prosseguirmos, devemos lembrar que uma função f é dita periódica se existe um número real positivo T , denominado período de f , tal que $f(x) = f(x + T)$, para todo x no domínio de f . Conforme exhibe a Figura 2, o gráfico de uma função periódica é obtido pela repetição de qualquer intervalo de comprimento T .

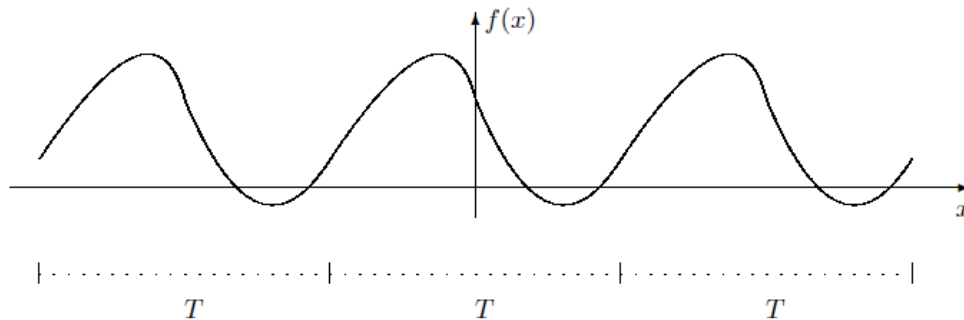


Figura 2. Gráfico de uma função periódica obtido pela repetição de intervalo de comprimento T .

Segue da equação $f(x) = f(x + T)$ que, se f é periódica de período T , então para qualquer n inteiro positivo temos $f(x) = f(x + nT)$, ou seja, qualquer múltiplo inteiro positivo nT do período T também é um período de f . O menor valor de T que satisfaz a equação $f(x) = f(x + nT)$, é chamado período fundamental de f . Qualquer período de f é um múltiplo inteiro do período fundamental. Se T é o período fundamental da função f , então sua frequência (angular) fundamental, denotada por ω_0 é dada por $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

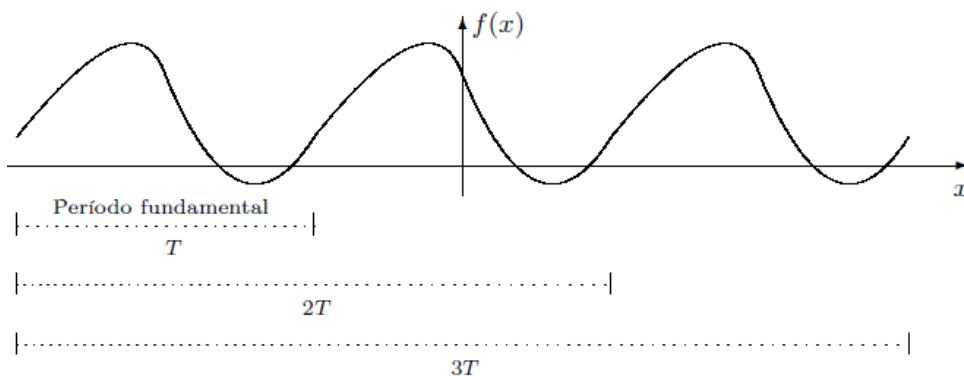


Figura 3. Gráfico de uma função periódica e sua frequência angular fundamental.

Em síntese, *Fourier* afirmou que, qualquer função $f(x)$ periódica, pode ser representada pela série trigonométrica da seguinte forma:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot \cos x + a_2 \cdot \cos 2x + a_3 \cdot \cos 3x + \dots + a_n \cdot \cos nx + \dots + b_1 \cdot \sin x + b_2 \cdot \sin 2x + b_3 \cdot \sin 3x + \dots + b_n \cdot \sin nx + \dots$$

Assim, basta calcularmos os coeficientes $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ e $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ definidos por:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T f(x) \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot x) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T f(x) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot x) dx$$

onde: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ é a frequência fundamental do sinal $f(x)$

T é o período fundamental do sinal $f(x)$.

Segundo Yaro e Lyra (2006), pode-se demonstrar também que a soma de uma série de *Fourier* truncada é a melhor aproximação de uma função periódica como combinação linear das funções trigonométricas consideradas na soma. Melhor aproximação, para os mesmos autores, neste caso, significa a aproximação da função com o menor erro quadrático.

O Fenômeno de Gibbs:

Se f é uma função seccionalmente diferenciável e absolutamente integrável, o Teorema de *Fourier* garante que a série de *Fourier* de f converge uniformemente para f em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de f . Se existir um ponto de descontinuidade neste intervalo I , a convergência não poderá ser uniforme em I (LOPES e PRECIOSO, 2009).

Segundo as mesmas autoras, *Gibbs* estudou a convergência da série de *Fourier* próximo a um ponto p de descontinuidade e descobriu um comportamento curioso, que ficou conhecido como fenômeno de *Gibbs*: a oscilação da soma parcial de ordem n no ponto $x = p$, não aproxima o salto de f no ponto $x = p$, independentemente do grau de proximidade de x com p .

Em situações práticas as ondas quadradas possuem apenas larguras de banda finitas, e comumente exibem efeitos de pulsação similares aos observados no fenômeno de *Gibbs*, ou efeitos de oscilação (*ripple*) similares aos da aproximação *sigma* (que é a aproximação para

uma variável aleatória com um grande número de amostras). Esse fenômeno ocorre por causa da transição brusca de 0 para 1 (e de 1 para 0) da janela retangular.

Para uma aproximação razoável do formato da onda quadrada, ao menos a harmônica fundamental e a terceira harmônica devem estar presentes, com a quinta harmônica sendo desejável. Estes requerimentos de largura da banda são importantes na eletrônica digital, aonde aproximações analógicas com largura de banda finita são utilizadas para gerarem formas de onda semelhantes à da onda quadrada (reconstrução pós-quantização). Os pulsos de transição são um fator importante neste caso, pois eles podem exceder os limites elétricos dos circuitos.

Projeto de Filtros Digitais:

Um exemplo pode ser dado ainda, no curso em questão, a partir de um dos conteúdos da unidade curricular “Processamento Digital de Sinais”, com a apresentação da construção de filtros como apresentado por Oppenheim e Willsky (2010), onde o fenômeno de *Gibbs* aparece no comportamento oscilatório próximo da banda de transição do filtro e para que se possa aliviar a presença das grandes oscilações na banda passante e na banda de corte, os autores sugerem que se devem usar funções que decaem a zero gradualmente.

Considerando um filtro do tipo passa-faixa, que é um dispositivo que permite a passagem das frequências de certa faixa e rejeita (atenua) as frequências fora dessa faixa, pode-se analisar a redução das oscilações.

Um filtro ideal possuiria uma banda passante totalmente plana (sem atenuação) e iria atenuar completamente todas as frequências fora desta banda. Adicionalmente, a transição para fora da banda seria instantânea em frequência. Na prática, nenhum filtro passa-faixa é ideal. O filtro não atenua todas as frequências fora da faixa desejada; existe uma região em particular fora da banda desejada em que as frequências são atenuadas, mas não rejeitadas. Este efeito é conhecido como o *roll-off* do filtro, e é geralmente expresso em dB de atenuação por oitava de frequência. Geralmente, o projeto de um filtro busca tornar o *roll-off* o mais seletivo possível para que posteriormente o filtro trabalhe o mais próximo do desejado. Entretanto, conforme o *roll-off* é tornado mais seletivo, a banda passante não é mais plana, ela começa a produzir um '*ripple*'. Este efeito é particularmente aparente na queda da banda passante, e é exatamente a manifestação prática do fenômeno de Gibbs.

Entre a frequência de corte inferior $f1$ e a frequência de corte superior $f2$ de um faixa de frequências está a frequência de ressonância, na qual o ganho do filtro é o máximo. A largura de banda de um filtro é a diferença entre $f2$ e $f1$.

Aplicação de Recursos Computacionais para a Análise e Simulação em Eletrônica:

Baseado na pesquisa de Ourique (2010) tem-se o destaque que, a utilização de recursos computacionais em praticamente todas as áreas da atividade humana, permite o acesso e a divulgação de informações numa escala muito maior do que aquela dos tempos em que *Fourier* viveu. Segundo o mesmo autor, o uso de recursos computacionais permite facilidades de cálculo, deixando mais tempo para análise e interpretação de resultados.

O Matlab[®] da Matworks (2013) é uma ferramenta de programação destinada a fazer cálculos com matrizes (Matlab = *MATRIX LABORATORY*). MATLAB[®] foi criado no fim dos anos 1970 por *Cleve Moler*, então presidente do departamento de ciências da computação da Universidade do Novo México. Ele logo se espalhou para outras universidades e encontrou um forte uso no âmbito da comunidade matemática aplicada. *Jack Little*, um engenheiro, conheceu a linguagem MATLAB[®], durante uma visita feita por *Moler* a Universidade de *Stanford* em 1983. Reconhecendo o seu potencial comercial, ele juntou-se a *Moler* e *Steve Bangert*. Eles reescreveram MATLAB[®] em C, em 1984 fundaram a MathWorks e prosseguiram no seu desenvolvimento. As bibliotecas reescritas ficaram conhecidas como LAPACK.

MATLAB[®] foi adotado pela primeira vez por engenheiros de projeto de controle, a especialidade de *Little*, e rapidamente se espalhou para outros campos de aplicação. Agora, é também utilizado nas áreas da educação, em especial o ensino da álgebra linear e análise numérica, e é muito popular entre os cientistas envolvidos com o processamento de imagem e o MATLAB[®] é construído na linguagem MATLAB[®], às vezes chamada M-código ou simplesmente M (MATWORKS, 2013).

MATERIAIS E MÉTODOS

A presente pesquisa baseou-se inicialmente na exploração bibliográfica de conteúdos relacionados à fundamentação sobre os problemas atuais no ensino de Cálculo, o desenvolvimento da série de *Fourier*, sua importância e aplicação em cursos de engenharia elétrica e eletrônica, e a sua transformada de tempo contínuo e nos efeitos de pulsação similares aos observados no fenômeno de *Gibbs*, ou efeitos de oscilação (*ripple*).

Foram prospectados no transcorrer deste estudo os conteúdos disponibilizados no Projeto Pedagógico do Curso em questão, focando nas suas unidades curriculares que tenham alguma relação com a aplicação destes conceitos e conteúdos em busca de pré-requisitos, utilizando a mesma metodologia proposta no trabalho de Godoy e Faria (2012).

A seguir foi definido analiticamente o desenvolvimento em série de *Fourier* de uma função periódica simples, a chamada "onda quadrada", fundamental para os estudos de engenharia eletrônica/elétrica, para ilustrar aos docentes o rigor do procedimento de desenvolvimento e a forma de sua apresentação em sala de aula para os discentes.

A seguir, para aplicar o método proposto por Ourique (2010), adotou-se o procedimento de análise e simulação computacional para processar dados correspondentes com o objetivo de se obter uma onda quadrada por meio da sua aproximação através da soma de parcelas senoidais, aplicando a série de *Fourier*.

Ourique (2010), em sua pesquisa, adotou a ferramenta de *software Maple*. Na presente pesquisa a escolha foi diferente e, para aplicar o método proposto por Ourique (2010), adotou-se o procedimento de análise e simulação computacional com a aplicação da ferramenta de *software* da *Matworks* (2013), o *MATLAB®* em sua versão 6.1.

Para tal, iniciou-se o procedimento de codificação para, a partir de uma onda senoidal pura, iniciar o processamento alterando os valores para a melhor aproximação, considerando a soma de parcelas senoidais e fenômeno de *Gibbs*, ou efeitos de oscilação (*ripple*). Desta forma, no contexto apresentado por Ourique (2010), este trabalho apresenta uma abordagem computacional de cálculo dos coeficientes de *Fourier* e das somas parciais da série de *Fourier* de uma dada função para valores de aproximação (convergência da função) para 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 e 19 (que são a harmônica fundamental, e as de ordem ímpar experimentadas em laboratório de informática do Centro Universitário).

A fim de comparar os resultados obtidos entre a aproximação adotada e a função real, foram apresentados os gráficos gerados dos processamentos para as diversas contribuições, simultaneamente, das harmônicas de ordem ímpar para que se pudessem observar os comportamentos das oscilações (*ripple*) das formas de onda resultantes e um gráfico que condensa o sinal senoidal original (harmônica fundamental) e o sinal gerado pelas demais harmônicas ímpares acima listadas para que os docentes e discentes possam melhor perceber a convergência ocorrendo.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

As disciplinas prospectadas do projeto pedagógico que apresentam, no curso em estudo, algum pré-requisito que demande preparação do docente responsável para promover um melhor aproveitamento discente quanto à utilização das séries de *Fourier*, segundo a aplicação da mesma metodologia desenvolvida por Godoy e Faria (2012), foram as seguintes: Física I, Física II, Física III, Cálculo III, Cálculo IV, Métodos Numéricos para Engenharia, Cálculo V, Fenômenos de Transportes, Circuitos Elétricos I, Circuitos Elétricos II, Circuitos Eletrônicos I, Sinais e Sistemas em Engenharia Eletrônica, Circuitos Eletrônicos II, Fundamentos de Controle, Sistemas de Comunicação, Controle Digital, Eletromagnetismo, Princípios de Comunicação, Circuitos Eletrônicos III, Ondas Eletromagnéticas, Processamento Digital de Sinais, Antenas, Eletrônica de Potência, Projeto de Sistemas Digitais e Comunicação Digital.

Dando andamento aos trabalhos, foi definido analiticamente o desenvolvimento em série de *Fourier* de uma função periódica simples: a chamada "onda quadrada", cujo gráfico é apresentado na Figura 4. As ondas quadradas são universalmente encontradas nos circuitos de chaveamento digitais e são naturalmente encontradas em dispositivos lógicos de dois níveis. Elas são utilizadas como referências de tempo em "sinais de *clock* (relógio)", devido a suas transições rápidas serem aplicáveis para o *trigger* de circuitos de lógica síncrona em intervalos de tempo precisos. Entretanto, as ondas quadradas contêm uma grande faixa de harmônicas, e estas podem gerar radiação eletromagnética ou pulsos de corrente que podem interferir em circuitos próximos, causando ruídos ou erros.

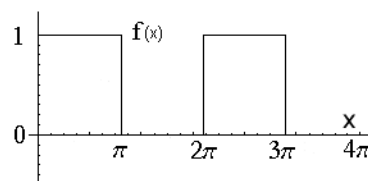


Figura 4. Função periódica simples - Onda quadrada.

No primeiro período, ela pode ser escrita como:

$$f(x) = 1, \text{ se } 0 \leq x < \pi \text{ e } f(x) = 0, \text{ se } \pi \leq x < 2\pi, \text{ ou seja, } f(x) = \begin{cases} 1, 0 \leq x < \pi \\ 0, \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

$$\text{Então, } T = 2\pi \text{ e } \omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

Calculando os coeficientes, conforme definido anteriormente:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} 1 \cdot dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \cdot dx \right] = \frac{1}{2\pi} (x) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} 1 \cdot \cos(nx) dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \cdot \cos(nx) dx \right] = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\text{sen}(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} = \left[\frac{1}{\pi \cdot n} \cdot \text{sen}(n\pi) \right] - \left[\frac{1}{\pi \cdot n} \cdot \text{sen}(0) \right] = 0$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} 1 \cdot \text{sen}(nx) dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \cdot \text{sen}(nx) dx \right] = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} = \left[-\frac{1}{\pi \cdot n} \cdot \cos(n\pi) \right] - \left[-\frac{1}{\pi \cdot n} \cdot \cos(0) \right] = -\frac{1}{\pi \cdot n} \cdot \cos(n\pi) + \frac{1}{\pi \cdot n} = \frac{-\cos(n\pi) + 1}{\pi \cdot n}$$

Então,
$$\begin{cases} b_n = 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ b_n = \frac{2}{\pi \cdot n}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Assim, temos os coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, \dots, \text{ pois } a_n = 0, \text{ para qualquer inteiro } n > 0$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi}, b_2 = 0, b_3 = \frac{2}{3\pi}, b_4 = 0, b_5 = \frac{2}{5\pi} \dots$$

Agora, finalmente, vamos determinar a série de *Fourier* para a função $f(x)$ dada:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2\text{sen}(x)}{\pi} + \frac{2\text{sen}(3x)}{3\pi} + \frac{2\text{sen}(5x)}{5\pi} + \frac{2\text{sen}(7x)}{7\pi} \dots$$

Neste caso, segundo informações obtidas de Gomes (2007), destacamos que este resultado se deve ao fato de a série trigonométrica de *Fourier* admitir duas simplificações, a saber:

- Se a função $f(t)$ for PAR, ou seja, $f(t) = f(-t)$, então todos os termos b_n serão nulos e a decomposição da função só terá cossenos.
- Se a função $f(t)$ for IMPAR, ou seja, $f(t) = -f(-t)$, então todos os termos a_n serão nulos e a decomposição da função só terá senos.

Ainda com relação aos resultados obtidos e considerações feitas, faremos uma análise mais detalhada, visando melhor compreensão dos cálculos dos coeficientes de *Fourier* da

função utilizada em nosso exemplo. Para isso, utilizaremos o conceito de valor médio de uma função de período 2π , que doravante representaremos por $\langle \rangle$, que é definido como sendo a medida da altura do retângulo de base igual ao período (2π), cuja área é a mesma da região entre a curva que representa a função e o eixo das abscissas.

Desta forma, o valor médio de uma função $f(x)$ de período 2π é dada por $\langle f(x) \rangle = A/2\pi$, onde A é a área da região entre a curva que representa $f(x)$ e o eixo das abscissas.

Importante lembrar, que o valor médio de uma função com determinado período envolvendo $\text{sen}nx$ e/ou $\text{cos}nx$, $n \geq 1$, é sempre igual a **zero**, como podemos observar nos exemplos da figura 5.

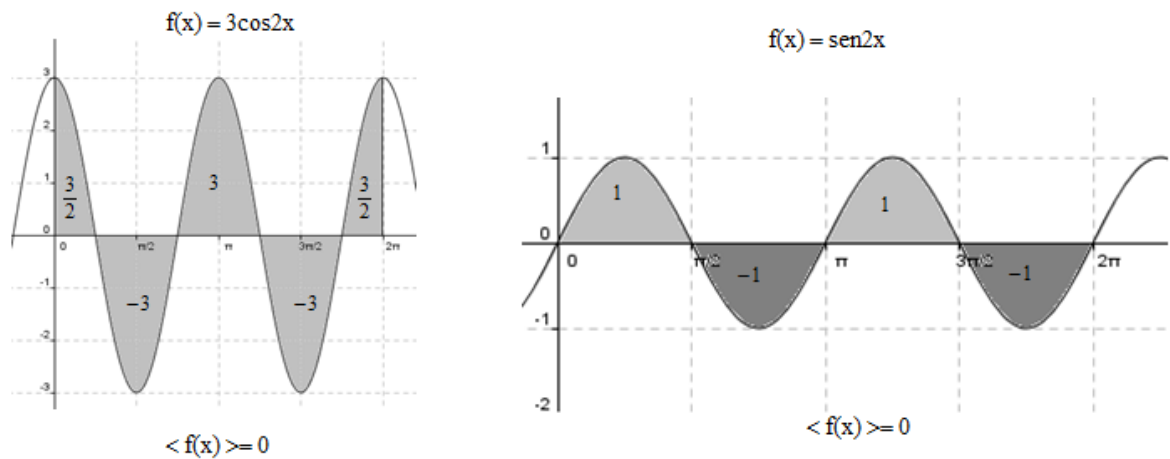


Figura 5. Indicação de que o valor médio de uma função envolvendo $\text{sen}nx$ e/ou $\text{cos}nx$ é sempre igual a zero.

Para as funções $f(x) = \text{sen}^2 nx$ e $f(x) = \text{cos}^2 nx$, temos (figura 6):

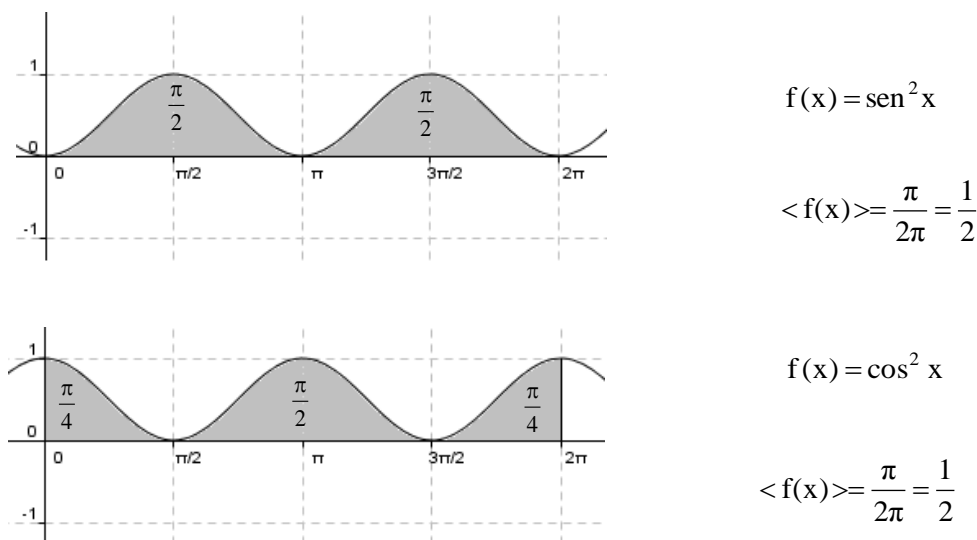


Figura 6. Funções $f(x)=\text{sen}^2x$ e $f(x)=\text{cos}^2x$.

Em geral: $\langle \text{sen}^2 nx \rangle = \langle \text{cos}^2 nx \rangle = \frac{1}{2}$

O coeficiente a_0 é definido como sendo o valor médio da função $f(x)$. Em nosso exemplo, $A = \pi$. Como $\langle f(x) \rangle = A/2\pi$, temos:

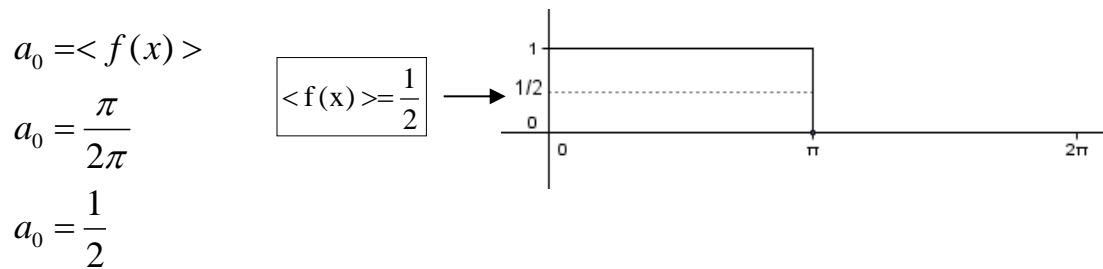


Figura 7. Indicação do valor médio da função estudada.

Para o cálculo de a_n , $n \geq 1$, multiplicamos a série de *Fourier* por $\text{cos} nx$ e, em seguida, tomamos o valor médio de cada termo.

Cálculo de a_1 :

$$f(x) \text{cos} x = a_0 \text{cos} x + a_1 \cdot \text{cos}^2 x + a_2 \cdot \text{cos} 2x \cdot \text{cos} x + a_3 \cdot \text{cos} 3x \cdot \text{cos} x + \dots +$$

$$b_1 \cdot \text{sen} x \cdot \text{cos} x + b_2 \cdot \text{sen} 2x \cdot \text{cos} x + b_3 \cdot \text{sen} 3x \cdot \text{cos} x \dots$$

$$\langle f(x) \text{cos} x \rangle = \langle a_0 \text{cos} x \rangle + \langle a_1 \cdot \text{cos}^2 x \rangle + \langle a_2 \cdot \text{cos} 2x \cdot \text{cos} x \rangle + \langle a_3 \cdot \text{cos} 3x \cdot \text{cos} x \rangle + \dots +$$

$$\langle b_1 \cdot \text{sen} x \cdot \text{cos} x \rangle + \langle b_2 \cdot \text{sen} 2x \cdot \text{cos} x \rangle + \langle b_3 \cdot \text{sen} 3x \cdot \text{cos} x \rangle \dots$$

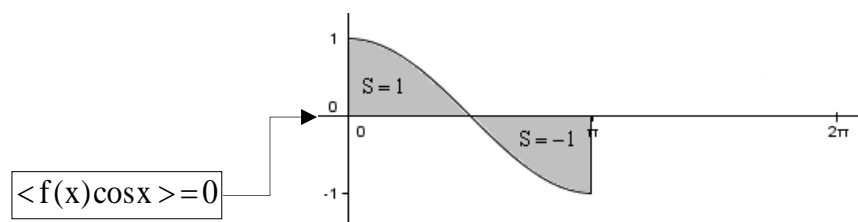
Podemos observar que todos os valores médios dos termos do 2º membro da equação são **nulos**, exceto o termo correspondente ao coeficiente a_1 , pois os demais termos contém o valor médio de uma função envolvendo $\text{sen} nx$ e/ou $\text{cos} nx$.

$$\text{Então, } \langle f(x) \text{cos} x \rangle = \langle a_1 \cdot \text{cos}^2 x \rangle$$

Lembrando que o valor médio da função $\text{cos}^2 nx$ é igual a $1/2$, temos:

$$0 = \langle a_1 \cdot \frac{1}{2} \rangle$$

Logo, $a_1 = 0$.

Figura 8. Representação gráfica de $f(x)\text{cos}x$.

Analogamente para o cálculo de a_2 , multiplicamos a série por $\cos 2x$.

$$\langle f(x) \cos 2x \rangle = \langle a_0 \cos 2x \rangle + \langle a_1 \cdot \cos x \cdot \cos 2x \rangle + \langle a_2 \cdot \cos^2 2x \rangle + \langle a_3 \cdot \cos 3x \cdot \cos 2x \rangle + \dots$$

$$+ \langle b_1 \cdot \sin x \cdot \cos 2x \rangle + \langle b_2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x \rangle + \langle b_3 \cdot \sin 3x \cdot \cos 2x \rangle \dots$$

$$\langle f(x) \cos 2x \rangle = \langle a_2 \cdot \cos^2 2x \rangle$$

$$0 = a_2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$a_2 = 0$$

$$\langle f(x) \cos 2x \rangle = 0$$

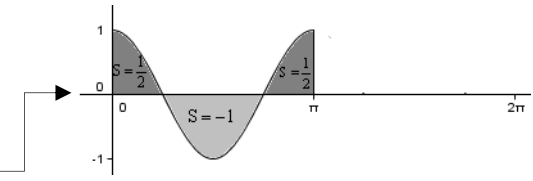


Figura 9. Representação gráfica de $f(x)\cos 2x$.

Generalizando, vemos que $\langle f(x) \cos nx \rangle = 0$, para todo $n \geq 1$.

Assim, $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$.

Para a obtenção de b_n , procedemos de modo semelhante, multiplicando a série de *Fourier* por $\sin nx$.

Cálculo de b_1 :

$$\langle f(x) \sin x \rangle = \langle a_0 \sin x \rangle + \langle a_1 \cdot \cos x \cdot \sin x \rangle + \langle a_2 \cdot \cos 2x \cdot \sin x \rangle + \langle a_3 \cdot \cos 3x \cdot \sin x \rangle + \dots +$$

$$\langle b_1 \cdot \sin^2 x \rangle + \langle b_2 \cdot \sin 2x \cdot \sin x \rangle + \langle b_3 \cdot \sin 3x \cdot \sin x \rangle \dots$$

$$\langle f(x) \sin x \rangle = \langle b_1 \cdot \sin^2 x \rangle$$

$$\langle f(x) \sin x \rangle = b_1 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\pi} = b_1 \cdot \frac{1}{2}$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi}$$

$$\langle f(x) \sin x \rangle = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$$

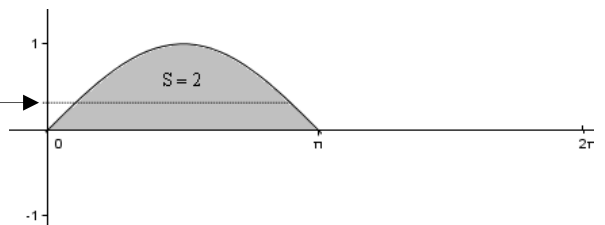


Figura 10. Representação gráfica de $f(x)\sin x$.

Lembrando que o valor médio da função $\sin^2 nx$ é igual a $\frac{1}{2}$.

Cálculo de b_2 :

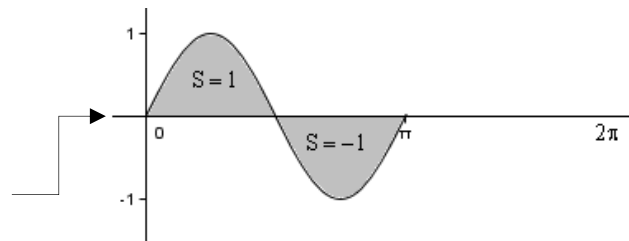
$$\langle f(x) \sin 2x \rangle = \langle a_0 \sin 2x \rangle + \langle a_1 \cdot \cos x \cdot \sin 2x \rangle + \langle a_2 \cdot \cos 2x \cdot \sin 2x \rangle + \langle a_3 \cdot \cos 3x \cdot \sin 2x \rangle + \dots +$$

$$\langle b_1 \cdot \sin x \cdot \sin 2x \rangle + \langle b_2 \cdot \sin^2 2x \cdot \sin x \rangle + \langle b_3 \cdot \sin 3x \cdot \sin 2x \rangle \dots$$

$$\langle f(x) \sin 2x \rangle = \langle b_2 \cdot \sin^2 2x \rangle$$

$$\langle f(x) \sin 2x \rangle = b_2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$b_2 = 0$$



$$\langle f(x)\text{sen}2x \rangle = 0$$

Figura 11. Representação gráfica de $f(x)\text{sen}2x$.

Cálculo de b_3 :

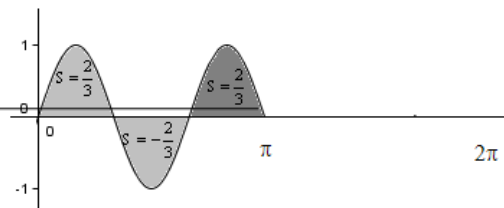
$$\langle f(x)\text{sen}3x \rangle = \langle a_0\text{sen}3x \rangle + \langle a_1 \cdot \cos x \cdot \text{sen}3x \rangle + \langle a_2 \cdot \cos 2x \cdot \text{sen}3x \rangle + \langle a_3 \cdot \cos 3x \cdot \text{sen}3x \rangle + \dots + \\ \langle b_1 \cdot \text{sen}x \cdot \text{sen}3x \rangle + \langle b_2 \cdot \text{sen}2x \cdot \text{sen}3x \rangle + \langle b_3 \cdot \text{sen}^2 3x \rangle + \langle \text{sen}4x \cdot \text{sen}3x \rangle + \dots$$

$$\langle f(x)\text{sen}3x \rangle = \langle b_3 \cdot \text{sen}^2 3x \rangle$$

$$\frac{1}{3\pi} = b_3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$b_3 = \frac{2}{3\pi}$$

$$\langle f(x)\text{sen}3x \rangle = \frac{\frac{2}{3}}{2\pi} = \frac{1}{3\pi}$$

Figura 12. Representação gráfica de $f(x)\text{sen}3x$.

Observando os resultados anteriores, vemos que $b_2=b_4= b_6= b_8=\dots 0$ e $b_1=b_3= b_5= \dots = \frac{2}{n\pi}$

Podemos observar que, neste desenvolvimento, não existem termos envolvendo o cosseno porque $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$

Então, utilizando os coeficientes encontrados temos a função que representa a onda quadrada inicialmente apresentada na Figura 4, por meio da sua aproximação através da soma de parcelas senoidais:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2\text{sen}(x)}{\pi} + \frac{2\text{sen}(3x)}{3\pi} + \frac{2\text{sen}(5x)}{5\pi} + \frac{2\text{sen}(7x)}{7\pi} \dots$$

Tendo a introdução formal dos exemplos acima apresentados, iniciam-se os procedimentos de codificação para o experimento da pesquisa, para processar dados correspondentes ao projeto de simulação computacional com o objetivo de se obter uma onda quadrada por meio da sua aproximação através da soma de parcelas senoidais, por meio da série de *Fourier*.

A partir de uma onda senoidal adotada como sendo inicial para a aproximação como ilustra a Figura 13, encaminhar o processamento no contexto apresentado por Ourique (2010), alterando os parâmetros de programação para a melhor aproximação, considerando a soma de parcelas senoidais e fenômeno de *Gibbs*, ou efeitos de oscilação (*ripple*).

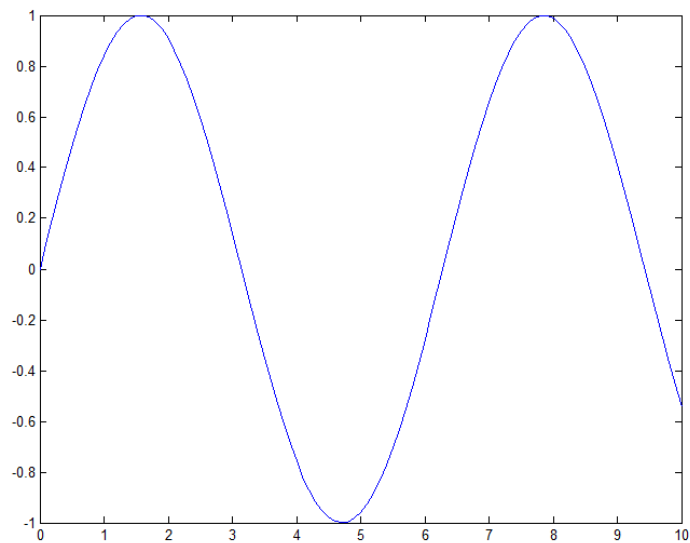


Figura 13. Onda senoidal utilizada como referência para os experimentos.

A obtenção desta forma de onda senoidal inicial ($k=1$) teve como base a codificação MATLAB[®] *Matworks* (2013), a seguir:

```
t = 0:.1:10;
y = sin(t);
plot(t,y);
```

Na primeira linha do código observamos que os eixos do gráfico foram definidos para que os valores de (y) excursionassem de 0 a 1 e o eixo correspondente ao tempo (t) excursionassem de 0 a 10.

Na segunda linha temos a função senoidal que representa o sinal puro, ou a harmônica fundamental e, finalmente a terceira linha com o comando para que o gráfico seja efetivamente plotado.

O próximo passo foi a codificação para a construção das formas de onda e aproximá-las por meio da soma de parcelas senoidais, por meio da série de *Fourier*, alterando-se os parâmetros de aproximação, cujos coeficientes são chamados de coeficientes de *Fourier*, para obter combinação linear das funções trigonométricas seno e cosseno.

Para tal, o código a seguir foi desenvolvido e aplicado aos experimentos:

A rotina foi executada para os parâmetros de aproximação assumindo os valores de: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 e 19 que são as harmônicas de ordem ímpar.

Para obter-se a aproximação da terceira harmônica ($k=3$) a codificação MATLAB[®] *Matworks* (2013), foi alterada para o seguinte:

```
t = 0:1:10;
y = sin(t) + sin(3*t)/3;
plot(t,y);
```

Neste caso, observa-se que a única alteração aconteceu junto à segunda linha do código, onde temos agora a função senoidal que representa o sinal puro mais a parcela senoidal referente à terceira harmônica. O resultado encontra-se na Figura 14.

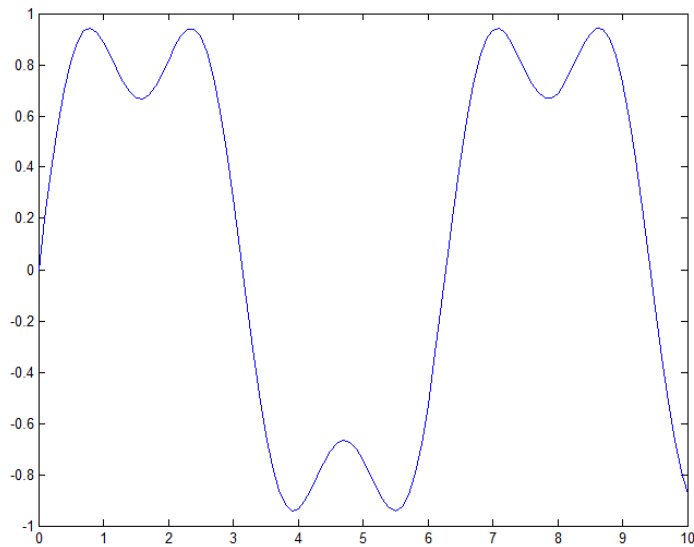


Figura 14. Aproximação para $k=3$.

Para obterem-se as aproximações das demais harmônicas previstas para o experimento, a codificação MATLAB[®] *Matworks* (2013), foi alterada sempre da mesma forma, onde se observa que as únicas alterações aconteceram junto à segunda linha do código, onde foram sempre somadas à função senoidal que representa o sinal puro as parcelas senoidais referentes às demais harmônicas.

Os resultados encontram-se nas Figuras 15 a 22.

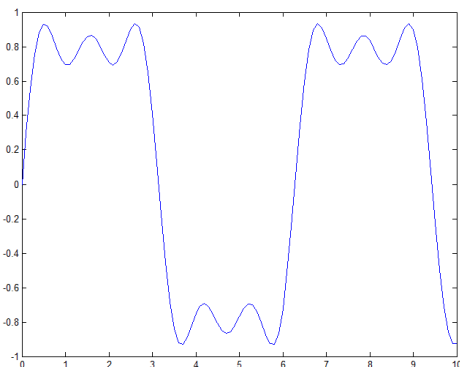


Figura 1. Aproximação para $k=5$.

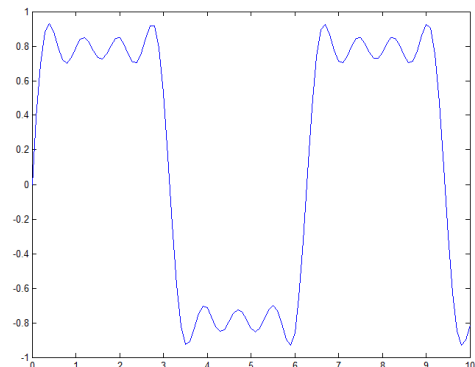


Figura 2. Aproximação para $k=7$.

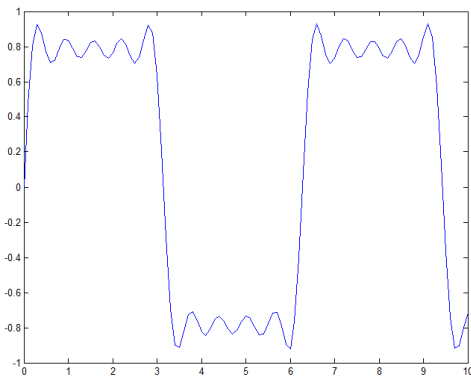


Figura 3. Aproximação para k=9.

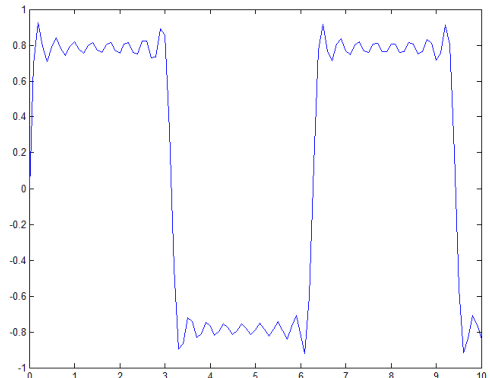


Figura 6. Aproximação para k=15.

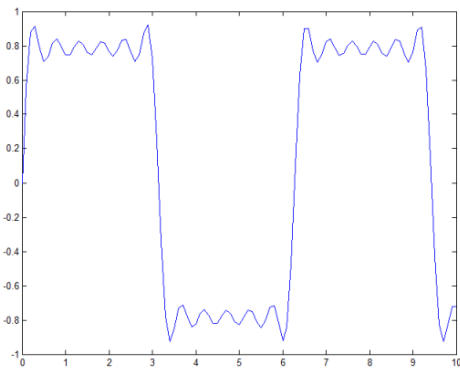


Figura 4. Aproximação para k=11.

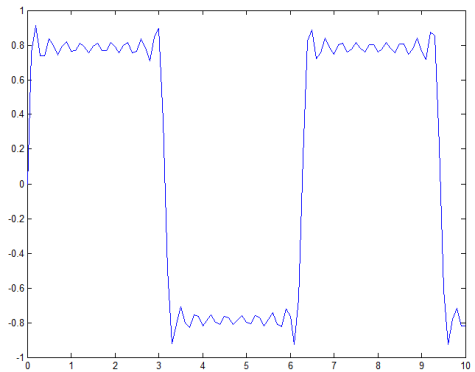


Figura 7. Aproximação para k=17.

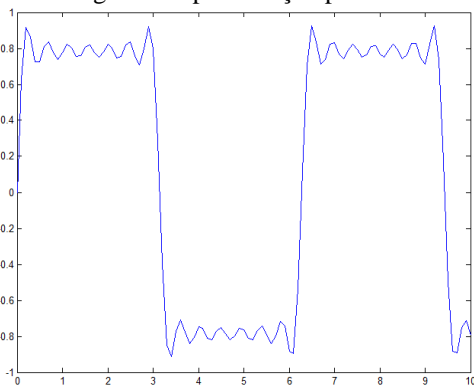


Figura 5. Aproximação para k=13.

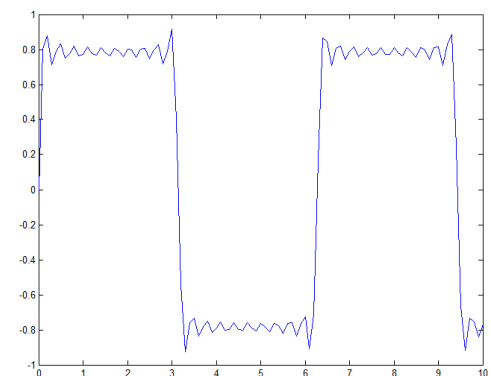


Figura 22. Aproximação para k=19.

Para a construção MATLAB[®] *Matworks* (2013), desta última Figura 22, seguindo o método apresentado para a obtenção da figura 13 em diante, o código a seguir foi aplicado:

```
t = 0:.1:10;
```

```
y = sin(t) + sin(3*t)/3 + sin(5*t)/5 + sin(7*t)/7 + sin(9*t)/9 + sin(11*t)/11 +  
sin(13*t)/13 + sin(15*t)/15 + sin(17*t)/17 + sin(19*t)/19;
```

plot(t,y);

Observa-se, no código acima, que a função y é composta pela soma do sinal puro mais as parcelas senoidais referentes às demais harmônicas ímpares. Pode-se observar também nas Figuras 15 a 22 que as aproximações acontecem, de forma que, aos poucos, com a soma de harmônicos, a tendência é que se desenhe uma onda quadrada, como indicado por Yaro e Lyra (2006) que dizem que ocorre a aproximação da função com o menor erro quadrático.

O mesmo diz Ourique, (2010), que uma função pode ser representada por uma série, em que cada parcela desta série é uma combinação linear das funções trigonométricas seno e cosseno, cujos coeficientes são chamados de coeficientes de *Fourier*.

Para melhorar a visualização, em detalhe expandido, iremos construir segundo recomendações de *Matworks* (2013), a partir da harmônica fundamental até a 19^a harmônica, criando vetores de sucessivamente mais harmônicos, e salvando todos os passos intermediários, como as linhas de uma matriz. Estes vetores são representados simultaneamente na mesma Figura 23 em um único quadrante para mostrar a evolução e convergência para a onda quadrada.

Note-se que segundo se destaca no fenômeno de *Gibbs*, o resultado final nunca vai realmente chegar à perfeição e, na Figura 23, isto se percebe visualmente.

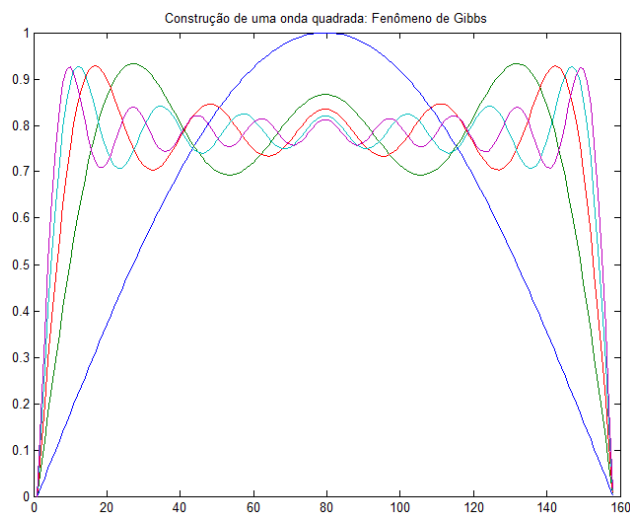


Figura 23. Construção de uma onda quadrada – Visualização das aproximações das somas das harmônicas parciais desde a fundamental (azul) até a 19^a (vinho) com destaque ao fenômeno de *Gibbs* (Destacam-se nesta figura a convergência e a oscilação nas bordas).

Para a construção MATLAB[®] *Matworks* (2013), desta Figura 23, o código a seguir foi aplicado:



```

t = 0:.02:3.14;
y = zeros(10,length(t));
x = zeros(size(t));
for k=1:2:19
    x = x + sin(k*t)/k;
    y((k+1)/2,:) = x;
end
plot(y(1:2:9,:))
title('Construção de uma onda quadrada: Fenômeno de Gibbs')

```

Neste código, as três primeiras linhas são responsáveis pela construção dos eixos do gráfico e sua graduação. As linhas 4 a 7 são correspondentes ao *loop* de repetição para a construção das harmônicas desde a fundamental até a 19ª harmônica e, as duas linhas finais correspondem à efetiva plotagem e a definição da linha de título do gráfico.

Observando-se os gráficos obtidos, verifica-se claramente que ao aumentarmos o número de harmônicas de ordem ímpar ao processamento na ferramenta de *software* de simulação, as curvas plotadas, que são as curvas compostas pela combinação linear das funções trigonométricas seno e cosseno (neste caso só senos), cada vez mais estas se aproximam de uma onda quadrada original adotada para o presente ensaio.

Observa-se também que, devido ao fenômeno de *Gibbs*, mesmo aumentando o número dos termos na soma, ainda existem oscilações nas bordas. Desta forma, a reconstrução não pode seguir exatamente o sinal original para as descontinuidades. Observa-se também que a amplitude do pico de oscilações (que representam o *ripple*), ao ampliarem-se os valores de *k*, reduz-se o *ripple*. Este efeito pode também, por exemplo, ser facilmente identificado de maneira prática, em laboratório de eletrônica, nos sistemas eletrônicos de retificação de corrente alternada para a obtenção de corrente contínua sem e com filtragem a capacitor.

CONCLUSÕES

Com base no levantamento bibliográfico, a exploração da bibliografia correspondente e com os experimentos realizados com simulação computacional, foi possível concluir que o ensino dos conteúdos das disciplinas de Cálculo, para os discentes do curso de Engenharia Eletrônica/Elétrica, demanda uma forte



Revista Engenharia, vol.8 – Setembro de 2013
contextualização para a confirmação da sua aplicação em situações práticas do dia a dia, motivando assim o aluno a se aprofundar nos estudos correspondentes.

Foi interessante o trabalho de prospecção e identificação das unidades curriculares do curso que apresentam pré-requisitos quanto ao conhecimento de séries de *Fourier*, o que alerta a coordenação pedagógica a buscar uma maior integração entre docentes dos ciclos básico, específico e profissionalizante, de forma a integrar e alinhar o discurso e a maneira de abordagem com o mesmo formalismo para a transmissão de conhecimentos aos discentes.

Os exemplos abordados na pesquisa são fundamentais para destacar, tanto para os docentes quanto para os discentes, a importância do conhecimento da correta aplicação do desenvolvimento das séries nesta área de conhecimento.

Observa-se que os resultados de simulações obtidos apontam para um menor erro de aproximação quando ao realizar a expansão dos termos da série de *Fourier* e permitem visualizar que a pesquisa, simulação e o cálculo com suporte computacional é uma importante ferramenta para promover a visualização da soma das parcelas senoidais para um suporte preditivo aos projetistas de sistemas eletrônicos digitais, pois, como destacado na revisão, dependendo da amplitude e da ordem dessas harmônicas, elas podem acabar por se sobrepor ao sinal fundamental, distorcendo sua forma de onda e interferindo no correto funcionamento dos dispositivos, principalmente quando se procura, nos projetos de filtros de alta qualidade e seletividade, um menor *roll-off*.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Centro Universitário Padre Anchieta de Jundiaí, pelo suporte da infraestrutura ao desenvolvimento da pesquisa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CAPELLI, A.; Analisadores De Espectro: Entenda A Importância Desse Instrumento Na Automação Industrial. Revista Mecatrônica Atual; Ano: 10; Nº 53; Set / Out – 2011. Disponível em: <<http://www.mecatronicaatual.com.br/artigos/1572-analisadores-de-espectro-entenda-a-importancia-desse-instrumento-na-automao-industrial>> Acesso em 28 de Julho de 2013.



GODOY, L. F. S.; FARIA, W.C.; O Cálculo Diferencial E Integral E Suas Aplicações No Ensino Da Engenharia: Uma Análise De Currículo; Anais do congresso de iniciação científica do INATEL – INCITEL; 2012.

GOMES, A.T.; Telecomunicações: Transmissão e Recepção AM-FM: Sistemas Pulsados; 2ª Ed; São Paulo; Editora Érica; 2007.

LOPES, J. H.; PRECIOSO, J. C.; The Gibbs Phenomenon and the Square Wave. (2009); Disponível em: < <http://www.impa.br/27coloquio/posters/75/abstract.pdf> > Acesso em 15 de Maio de 2013.

MATWORKS; The Language of Technical Computing; Disponível em: <<http://www.mathworks.com/products/matlab/>> Acesso em 10 de Maio de 2013.

MELLO, M. H. C. S.; VAZ, M. R.; MELLO, J. C.C.B. S.; Capacitação Do Professor De Engenharia: Uma Experiência E Um Projeto; Anais Eletrônicos do VI Encontro de Educação em Engenharia; Itaipava – Petrópolis; Rio de Janeiro; 2000.

OPPENHEIN, A. V.; WILLSKY, A.S.; Sinais e Sistemas; 2ed; São Paulo; Pearson Prentice Hall; 2010.

OURIQUE, L.E.; Cálculo Computacional Da Série De Fourier. (2010); Disponível em: <<http://www.pucrs.br/edipucrs/erematsul/minicursos/calculocomputacional.pdf> > Acesso em 15 de Maio de 2013.

REZENDE, W. M.; O Ensino De Cálculo: Dificuldades De Natureza Epistemológica. Disponível em: < <http://ciencialivre.pro.br/media/38feb1437d0d116efff8036fffd524.pdf> > Acesso em 30 de Julho de 2013.

SODRÉ, U.; Séries de Fourier: Notas de Aulas Compiladas - Computação, Engenharia Elétrica e Engenharia Civil. Disponível em: < <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/fourier/sfourier.pdf> > Acesso em: 16 de Maio de 2013.



Revista Engenho, vol.8 – Setembro de 2013

TONIDANDEL, D.A.V.; ARAÚJO, A.E.A.; Conectando Transformadas: Fourier E Laplace; Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática, CBA; 2012; Disponível em:

<http://www.cpdee.ufmg.br/~petee/download/Arquivos_download/Historia%20da%20Engenharia%20Eletrica/transformadas_de_fourier_Laplace.pdf > Acesso em 28 de Julho de 2013.

YARO, B.J.; LYRA, A.C.C.; Circuitos Elétricos; São Paulo; Pearson Prentice Hall; 2006.