UMA ABORDAGEM QUANTITATIVA DO ÍNDICE DE GINI E DA CURVA DE LORENZ

*Afrânio Carlos Murolo**

RESUMO

No presente trabalho, procura-se mostrar e analisar o grau de concentração da renda de uma dada população, utilizando-se como ferramenta essencial o Índice de Gini e a Curva de Lorenz, analisando sobremaneira o caráter quantitativo dos dados de uma população e suas respectivas rendas.

Nas análises e conclusões efetuadas dos dados apresentados, também se apresentam dados hipotéticos oriundos de tabelas e gráficos representativos da renda acumulada em função da população acumulada em porcentagem.

PALAVRAS-CHAVE: *desigualdade da renda, grau de concentração da renda, reta de igualdade, áreas entre curvas.*

ABSTRACT

In the present work, one tries to show and analyse the degree of income concentration of a certain population, using as essential tools the Gini Index and the Lorenz Curve, analysing specially the quantitative character of the data of a population and its respective incomes.

In the effected analysis and conclusions of the data presented, hypothetical data arising from representative tables and graphs of accumulated income in function of the percentage of accumulated population are also presented.

KEY WORDS*: inequality of income, degree of concentration of the income, straight equality, areas between curves.*

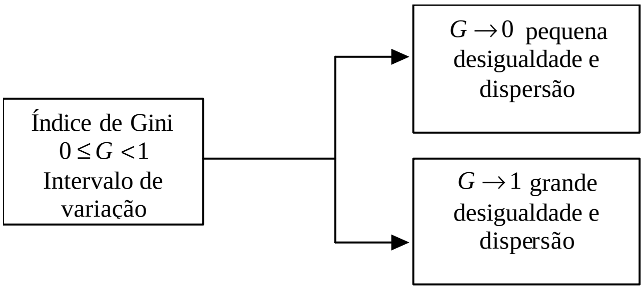
Introdução

Uma das medidas usuais de mensuração do grau de concentração ou desigualdade da renda de uma população é o índice de Gini, cuja abreviatura é denotada por (G). Esse índice apresenta uma variação numérica dentro do intervalo $0 \le G < 1$, determinando duas situações extremantes à medida em que (G) se aproxima de **zero** ou de **um.** Na primeira situação $(G \to 0)$ podemos afirmar que está ocorrendo uma pequena dispersão ou pequena desigualdade na renda de uma região ou população, porém, na segunda situação quando $(G \to 1)$, implica em uma grande dispersão ou grande desigualdade na renda de uma dada população.

Ainda podemos utilizar o índice de Gini para medir o grau de concentração da

* Mestre em Engenharia de Produção pela UNIP e professor das Faculdades Padre Anchieta de Jundiaí.

renda em uma empresa, em uma cidade, etc.



A Curva de Lorenz se caracteriza pela representação da proporção acumulada da população em porcentagem subdividida em estratos no eixo horizontal (x), com a proporção acumulada correspondente da renda em porcentagem acumulada dessa mesma população.

1. Cálculo do índice de Gini e a construção da curva de Lorenz.

Com o intuito de exemplificar, construir a Curva de Lorenz e definir o índice de Gini, utilizaremos os dados hipotéticos da Tabela 1 que relaciona porcentagem acumulada da renda e porcentagem acumulada da população.

Tabela 1:

O Gráfico 1 representa a Curva de Lorenz (L) e a reta de igualdade de distribuição de Renda (I) provenientes dos dados da Tabela 1.

Gráfico 1: Curva de Lorenz para os dados da Tabela 1

A reta de igualdade representada pela diagonal (I), caracteriza a completa igualdade, onde todos recebem a mesma renda, significando que 40% da população receberá 80% da renda, etc. Essa mesma reta também poderá ser chamada de Reta de Eqüidistribuição, denotando uma perfeita distribuição da renda.

Por outro lado a Curva de Lorenz é obtida pela ligação dos valores de $P_{i(ac)}(\%)$ com $R_{i(ac)}(\%)$, quando a proporção acumulada da renda varia em função da proporção acumulada da população.

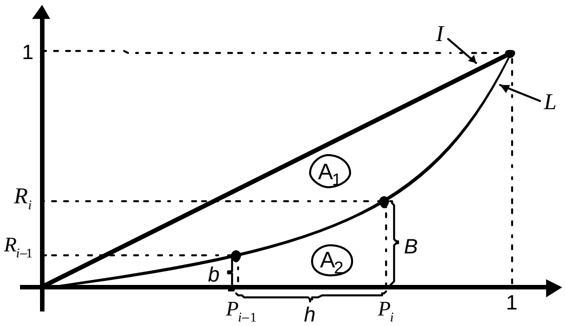
Vale lembrar que quanto maior for o número de estratos da população, tanto maior será o número de pontos na Curva de Lorenz propiciando cada vez mais um traçado de caráter curvilíneo. Uma importante observação que podemos fazer é que à medida que a Curva de Lorenz (L) vai se afastando da reta de igualdade (I) o grau de concentração ou desigualdade da Renda aumenta. Portanto quanto mais próxima a Curva (L) estiver da Reta (I) teremos um grau de concentração menor e uma distribuição de renda mais justa (menor desigualdade).

Observando o Gráfico 1 percebemos nitidamente que 40% da população participam com 11,57% da renda total; 60% com 25,38%; 80% com 45,64%, etc.

2. Determinação do Índice de Gini através do cálculo de áreas entre curvas

Observa-se no Gráfico 2 que o índice de Gini é dado por $G = 2A_1$, tomando como base os estratos P_{i-1} e P_i da população e suas respectivas rendas R_i e R_{i-1} .

Gráfico 2:



Na figura acima, A_1 é a área formada pela Reta (I) e pela Curva (L) e A_2 caracteriza a área do trapézio formado sob a Curva de Lorenz, cuja área é igual a $A_2 = \dfrac{(B+b)\cdot h}{2}$.

Como podemos ter "**n**" trapézios sob a curva, então: $A_2 = \sum_{i=1}^{n}\left[\dfrac{(R_i + R_{i-1})\cdot(P_i - P_{i-1})}{2}\right]$, logo $A_1 + A_2 = 0{,}5$

Como estamos interessados na área A_1, temos:

$$A_1 = 0{,}5 - A_2 \Rightarrow A_1 = 0{,}5 - \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(R_i + R_{i-1})\cdot(P_i - P_{i-1})}{2}\right]$$

Multiplicando ambos os membros por (**2**) temos:

$$2A_1 = 1 - \sum_{i=1}^{n}\left[(R_i + R_{i-1})\cdot(P_i - P_{i-1})\right]$$

Portanto $2A_1 = G \Rightarrow G = 2A_1 \rightarrow$ quanto maior área A_1 maior será o nível de desigualdade da Renda de uma população em estudo.

3. Áreas entre curvas e o cálculo de integrais para Índice de Gini

Através da expressão $G = 2A_1$, poderemos extrapolar o raciocínio para o cálculo de integrais utilizando áreas entre curvas, chamando a reta de igualdade de $I(x)$ e a Curva de Lorenz por $L(x)$, e considerando o domínio para as funções por $0 \leq x \leq 1$. O Gráfico 3 ilustra as duas funções $L(x)$ e $I(x)$, determinando a área sombreada A_1.

Como $G = 2A_1$, tem-se:

$$A_1 = \int_0^1 \left[I(x) - L(x) \right] \cdot dx$$

Portanto:

$$G = 2 \cdot \int_0^1 \left[I(x) - L(x) \right] \cdot dx$$

Do ponto de vista matemático a função $L(x)$ apresenta as seguintes propriedades:

a) O domínio de L é dado por: $0 \leq x \leq 1$ e sua imagem é $0 \leq y \leq 1$ e é crescente nos intervalos citados.

b) $L(0) = 0$, $L(1) = 1$ e $L(x) \leq x \ \forall x$ pertencente ao intervalo $0 \leq x \leq 1$

4. Exemplificação do modelo matemático.

Para a demonstração matemática do Índice de Gini e de seu cálculo, faremos uso do calculo de integrais e para tanto consideraremos a Curva de Lorenz descrita pela função $L(x) = 0{,}1x + 0{,}9x^2$ e pela reta de igualdade

$f(x) = x$, sendo o domínio da função dado por: $0 \leq x \leq 1$. Os dados hipotéticos compilados são objetos de uma Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD) do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

Na seqüência serão estabelecidos os cálculos do Índice de Gini, Curva de Lorenz, sua representação gráfica e o nível de renda para os 10% mais pobres (0,10-) da população.

Calculando o Índice de Gini:

$$G = 2\int_0^1 \left[I(x) - L(x) \right] \cdot dx \Rightarrow G = 2\int_0^1 \left[(x) - (0{,}1x + 0{,}9x^2) \right] \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left[\frac{x^2}{2} - \left(\frac{0{,}1x^2}{2} + \frac{0{,}9x^3}{3} \right) \right]_0^1$$

$$\Rightarrow \qquad 2\left[\frac{(1)^2}{2} - \frac{0{,}1 \cdot (1)^2}{2} - \frac{0{,}9 \cdot (1)^3}{3} \right]$$

$\therefore\ G = 0{,}30$ indicando um baixo grau de concentração ou pequena desigualdade na renda desta cidade.

Gerando uma tabela para a construção gráfica, temos:

Gráfico 4:

Calculando o nível de renda para os 10% mais pobres da população:

Se $x = 0{,}1$ (correspondente aos 10% mais pobres ou 1º decil), temos:

$y_{(0,1)} = 0{,}9 \cdot (0{,}1)^2 + 0{,}1 \cdot (0{,}1) = 0{,}020$, portanto os 0,10- (mais pobres) participam com 0,02 da renda ou 0,02 x 100 = 2% da renda total.

Para o quinto decil (x=0,5) temos:

$$y_{(0,5)} = 0{,}9 \cdot (0{,}5)^2 + 0{,}1 \cdot (0{,}5) = 0{,}275 \times 100 = 27{,}5\%$$

Logo até o 5º decil, a participação na renda total é de 27,5%.

Referências Bibliográficas

HOFFMANN, Rodolfo. *Estatística para Economistas.* São Paulo: Pioneira, 1991.

ROSSETTi, José Paschoal. *Introdução à Economia.* São Paulo: Atlas, 1977.