

## TOMADA DE DECISÕES EM ENERGIA E ANÁLISE DE VALORES ATRAVÉS DE MODELOS PROBABILÍSTICOS

Murolo, Afrânio Carlos\*

### Resumo

A análise das decisões nos fornece uma metodologia racional para os processos de tomada de decisão, considerando cenários cada vez mais complexos, que se apresentam em face das incertezas geradas pelo mercado consumidor energético.

Para auxiliar nesses processos e na identificação de um melhor caminho na solução desses problemas, envolvendo decisões de cunho sequenciais, utilizamos árvores de decisão como critério para a condição de chegar à melhor solução entre as várias alternativas, com o propósito de minimização do custo esperado.

Cabe também salientar, que esta técnica utilizada neste artigo, associa variáveis de decisão em modelos energéticos associando à implantação de um programa piloto, através de dados experimentais, determinando o custo mínimo esperado e, conseqüentemente, atingindo a política ótima de mercado.

### 1. Introdução

Uma técnica muito utilizada em pesquisa operacional para a identificação do melhor caminho na solução de problemas, que envolvem decisões seqüenciais, é denominada árvores de decisões. Pode-se dizer que árvores de decisão, representam processos de decisão por meio de nós. Estes nós representam pontos no tempo. Contudo, esse processo, também é utilizado na determinação de decisões ótimas, quando se apresentam, de certa forma, muito complexos.

Os passos para a construção de uma árvore são caracterizados pela determinação dos caminhos a serem percorridos na determinação das probabilidades associadas aos eventos, associação dos valores monetários para cada uma das alternativas, e resolução do modelo em função da avaliação dos valores esperados em cada nó.

Podemos enunciar, também, que esta técnica associa riscos *versus* retorno de projetos de investimento, dado que a mesma consegue aliar situações de tomada de decisão em horizontes futuros.

---

\* Mestre em engenharia da produção. Professor do curso de Administração de Empresas do UNIANCHIETA.

Uma decisão recomendada a ser admitida como possível solução de um problema é aquela que determina um ganho esperado máximo, ou um custo mínimo esperado. Portanto, as decisões que tornam não compatíveis com o processo tem seus ramos excluídos da árvore de decisão.

## 2. Modelos de Decisão

Nos anos recentes, a análise de decisões e modelos de decisões tem-se tornado peças importantes nos processos de tomada de decisão nos negócios, indústria e governo. Diante da incerteza, as quais estão direcionadas num problema, a análise de decisões fornece uma metodologia racional para a tomada de decisão, quando sentimos que as possíveis consequências daquela decisão são muito importantes para a empresa ou para o negócio em análise. Portanto, podemos salientar que embora incertos quanto às consequências de uma decisão, estamos nos deparando com escolhas que envolvem riscos. No entanto, os modelos de decisão permitem ao analista escolher entre alternativas de uma maneira ótima, levando-se em consideração dados experimentais com o propósito de redução do grau de incerteza.

Podemos definir o processo de decisão como aquele que requer um único ou diversos conjuntos das decisões possíveis para sua composição. Cada decisão possível tem um ganho ou perda a ele associado, o qual é determinado por circunstâncias externas ao processo.

Designaremos as decisões possíveis (ações) por  $a_1, a_2, \dots, a_m$ ; os estados naturais  $C$  (cenários) por  $c_1, c_2, \dots, c_m$ ; e o retorno esperado por  $E(a_i)$ .

A tabela 1 é um exemplo de identificação da matriz de ganhos para as possíveis entradas de ações e cenários:

**Tabela 1 - Matriz de ganho**

| Ação/Cenário | $c_1$<br>$p_i$ (probabilidade) | $c_2, \dots, c_m$<br>$p_i$ (probabilidade) |
|--------------|--------------------------------|--|
| $a_1$        | $g_{11}$                       | $g_{12} \quad g_{1m}$                      |
| $a_2$        | $g_{21}$                       | $g_{22} \quad g_{2m}$                      |
| .            | .                              | .  |
| .            | .                              | .  |
| .            | .                              | .  |
| $a_m$        | $g_{m1}$                       | $g_{m2} \quad g_{mm}$                      |

### 2.1. Considerações teóricas sobre o Teorema de Bayes

A determinação de  $P(B)$ , através da utilização do teorema da probabilidade total

$P(B) = P(B/R_1) \cdot P(R_1) + P(B/R_2) \cdot P(R_2) + \dots + P(B/R_n) \cdot P(R_n)$ , precisamos obviamente conhecer as probabilidades condicionais  $P(B/R_1)$ ,  $P(B/R_2)$ , ...,  $P(B/R_n)$ , que representaremos de modo genérico por  $P(B/R)$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Se desejarmos avaliar uma probabilidade condicional do tipo  $P(R_i/B)$ , devemos utilizar então:

$$P(R_i/B) = P(R_i \cap B) / P(B)$$

A expressão do numerador  $P(R_i \cap B) / P(B/R_i) \cdot P(R_i)$

e a expressão do denominador  $P(B) = P(B/R_1) \cdot P(R_1) + P(B/R_2) \cdot P(R_2) + \dots + P(B/R_n) \cdot P(R_n)$

Substituindo-se estes valores, obtém-se:

$$P(R_i/B) = \frac{P(B/R) \cdot P(R_i)}{P(B) = P(B/R_1) \cdot P(R_1) + P(B/R_2) \cdot P(R_2) + \dots + P(B/R_n) \cdot P(R_n)}$$

Observa-se que a expressão anterior, avalia a probabilidade da "causa"  $R_i$ , dado o efeito  $B$ .

O critério, *a priori* (ou de Bayes), também é utilizado para determinar a decisão que maximiza o ganho esperado (MUROLO et al., 1995, p. 176).

### 3. Critério Minimax, Mediano e Otimista

Podemos inserir neste critério, três modalidades utilizadas para relacionar a decisão, e dentre elas configuram o Critério Minimax (ou pessimista), Critério Otimista e o Critério Mediano.

O primeiro critério (pessimista) visa maximizar o possível ganho mínimo, quando estamos trabalhando com uma matriz de ganho. Já o segundo critério, determina a maximização do possível ganho e; finalmente, o critério mediano é determinado pela média de ganhos mínima e máxima, esperando ser o maior possível entre as decisões formuladas.

Como exemplificação desses critérios mencionados anteriormente, examinaremos a tabela 2.

**Tabela 2 - Critérios: Minimax, Otimista e Mediano**

| Estados naturais/Cenários | $C_1$ | $C_2$ |
|---------------------------|-------|-------|
| $a_1$<br>(Consumo)        | 80    | 700   |
| $a_2$<br>(Manutenção)     | -150  | 2.200 |

Conclui-se pela 1ª. Linha da matriz de ganho, que o ganho mínimo para a decisão  $a_1$  é igual a 80, sendo o ganho mínimo na 2ª. Linha igual a -150. Portanto, o ganho mínimo para a decisão  $a_1 = 80$ , e o ganho mínimo para a decisão  $a_2 = -150$ .

Como o Critério Minimax maximiza o possível ganho mínimo, tem-se que 80 é o valor de ganho correlacionado à condição de decisão  $a_1$ .

Para calcularmos o ganho sob a ótica do Critério Mediano, podemos estabelecer:

- Ganho máximo para  $a_1 = 700$ , e ganho mínimo = 80
- Ganho máximo para  $a_2 = 2.200$ , e ganho mínimo = -150.

Efetuada-se o cálculo das médias aritméticas, temos:

$$a_1 = 700 + 80/2 = 390 \quad e \quad a_2 = 2.200 - 150/2 = 1.025$$

donde se conclui, que a decisão mais eficaz é a  $a_2$ , baseada neste critério.

Finalizando, na linha  $a_2$  e cenário, relativo à coluna  $c_2$ , temos o ganho igual a 2.200, decisão esta, que pode ser observada sob o ponto de vista do Critério Otimista.

#### 4. Uso da Técnica de Bayes na solução de problemas na tomada de decisão, através do cálculo da distribuição, *a posteriori*

Vamos considerar neste exemplo, um estudo de viabilidade, dado pela possível substituição de fontes geradoras de energia elétrica para fontes geradoras de energia a óleo. Neste estudo, vamos analisar algumas decisões recomendadas para o problema, tais como: economia, inalterado e perda, relacionados a estados naturais; compondo com essa associação um programa piloto de fonte de energia geradora.

Para sermos mais específicos, a empresa em questão é detentora de uma rede de hotéis e está buscando informações técnicas e formas de minimização de custos e, para tanto, observa atentamente suas alternativas possíveis e viáveis para redução de seus custos energéticos.

Após consulta realizada em uma companhia fabricante de geradores a óleo, estimou-se um custo de conversão de energia elétrica para energia a óleo, na ordem de 500.000 u.m. Porém, o fabricante afirma, de forma categórica, que se a empresa efetuar a conversão ela deterá um lucro de 1.050 u.m., à medida que a conversão for substancialmente efetivada e incorporada pela empresa, ao longo do tempo. Uma possibilidade que pode, até certo ponto ser remota, porém não impossível é de que nada ocorra em termos de custos com a implantação da conversão.

Admite-se que o fabricante tem experiência em situações similares, sendo que para esse problema de conversão de energia, caracterizou a distribuição *à priori*, de acordo com o levantamento de dados de mercado anteriores, e destinaram 25% de probabilidade de lucro de 1.050 u.m., 45% para o custo de conversão e 30% se nada vier a ocorrer com a conversão.

Diante do objetivo do programa de conversão de energia, a própria empresa decidiu implantar um programa piloto, com a finalidade de se avaliar indicadores, que se observem à própria realização do programa, como também, a sua viabilidade econômica de conversão de energia, propriamente dita.

Tendo-se em vista que os gastos operacionais para a adequação e implementação do programa a ser orçado em torno de 50.000 u.m., determina-se como amostra significativa para a avaliação três geradores a serem testados por um período de três bimestres, no tocante às tomadas de decisão: economia, inalterado e perda, sendo que os estados naturais pressupostos pelo programa piloto, indicariam: perda, economia e processo inalterado.

Os valores correspondentes à matriz de ganho e programa piloto apresentam-se, de acordo com as tabelas 3 e 4, respectivamente, onde são discriminados, os valores relativos à matriz de ganho em u.m., e ao programa piloto.

**Tabela 3 - Matriz de Ganho (u.m.)**

| Decisão \ Cenários | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ |
|--------------------|-------|-------|-------|
|                    | $a_1$ | 1.050 | 0     |
| $a_2$              | 0     | 0     | 0     |

**Tabela 4 - Probabilidades relativas ao Programa Piloto**

|          | Indicação de Economia | Sem alteração | Perda de Economia |
|----------|-----------------------|---------------|-------------------|
| Economia | 0,6                   | 0,3           | 0,1               |
| Estável  | 0,4                   | 0,4           | 0,2               |
| Perda    | 0,1                   | 0,5           | 0,4               |

Temos abaixo, o delineamento dos eventos ( $\theta_i$ ) e decisões ( $a_i$ ), com o intuito de maximização da economia esperada no processo de tomada de decisão, observando que o mesmo será analisado sob a ótica de dois estágios.

O primeiro estágio deve-se ao fato da realização ou não do programa piloto e, em consequência, o segundo estágio versará sobre a identificação e decisão da conversão de energia proposta pelo fabricante.

$A_I$  = Decidir pela não aceitação/realização do programa piloto.

$A_{II}$  = Decidir pela aceitação/realização do programa piloto

- $a_1$  = Decisão pela conversão para geradores a óleo
- $a_2$  = Decisão pela não conversão de geradores a óleo
- $c_1$  = Estabelece, em termos de operação, que os geradores a óleo são mais baratos que o sistema elétrico de energia, ora utilizado.
- $c_2$  = Estabelece que o custo do sistema elétrico de energia na em operação são iguais aos geradores a óleo
- $c_3$  = Estabelece que o sistema elétrico de energia apresenta custos superiores na operação, em relação aos geradores a óleo
- $\theta_1$  = Evento indicando economia pela implantação do programa piloto (geradores a óleo)
- $\theta_2$  = Evento indicando inalterado (nem economia, nem perda)
- $\theta_3$  = Indicação de perda

## 5. Resultados e Discussão

A decisão da realização ou não do programa piloto está pautada nos respectivos ganhos esperados, relativos às decisões: não aceitação e aceitação do programa piloto. Portanto, deve-se calcular os ganhos relativos às decisões:  $a_1$  e  $a_2$ , se o programa piloto não se realizar.

$$E(G_1) = (1050)(0,25) + (0)(0,30) + (-500)(0,45) = 37,5$$

$$E(G_2) = (0)(0,25) + (0)(0,30) + (0)(0,45) = 0$$

Verifica-se sobre o critério *a priori*, que o ganho máximo está associado a  $a_1$ , logo, optaremos pela decisão de conversão de geradores a óleo.

De acordo com os dados da tabela 5, podem-se enunciar a probabilidade condicional, a priori:

**Tabela 5 – Cálculos de distribuição *a priori***

| $\theta_1$              | $\theta_2$              | $\theta_3$              |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $P(\theta_1/c_1) = 0,6$ | $P(\theta_1/c_2) = 0,4$ | $P(\theta_1/c_3) = 0,1$ |
| $P(\theta_2/c_1) = 0,3$ | $P(\theta_2/c_2) = 0,4$ | $P(\theta_2/c_3) = 0,5$ |
| $P(\theta_3/c_1) = 0,1$ | $P(\theta_3/c_2) = 0,2$ | $P(\theta_3/c_3) = 0,4$ |

$$P(c_1/\theta_1) = \frac{P(\theta_1/c_1) \cdot P(c_1)}{P(\theta_1/c_1) \cdot p(c_1) + P(\theta_1/c_2) \cdot p(c_2) + P(\theta_1/c_3) \cdot p(c_3)}$$

$$P(c_1/\theta_1) = \frac{(0,6)(0,25)}{(0,6)(0,25) + (0,4)(0,3) + (0,1)(0,45)} = 0,476,2$$

Uniformizando os dados em uma tabela, temos:

**Tabela 6 - Cálculo da Distribuição a posteriori de  $\theta_i$**

| $\theta_1$                                   | $\theta_2$                                   | $\theta_3$                                   |
|--|--|--|
| <b><math>P(c_1/\theta_1) = 0,4762</math></b> | <b><math>P(c_1/\theta_2) = 0,1786</math></b> | <b><math>P(c_1/\theta_3) = 0,0943</math></b> |
| <b><math>P(c_2/\theta_1) = 0,3810</math></b> | <b><math>P(c_2/\theta_2) = 0,2857</math></b> | <b><math>P(c_2/\theta_3) = 0,2264</math></b> |
| <b><math>P(c_3/\theta_1) = 0,1429</math></b> | <b><math>P(c_3/\theta_2) = 0,5357</math></b> | <b><math>P(c_3/\theta_3) = 0,6792</math></b> |

Segue da análise feita anteriormente, que  $E(G_1) = 37,5$  e  $E(G_2) = 0$ . Como  $E(G_1) > E(G_2)$ , determinou-se optar pela realização do programa piloto, dado por  $A_{II}$ .

Cabe salientar, que para a execução do programa piloto, o seu custo está orçado na ordem de 50 u.m., portanto, todos os cálculos devem ser deduzidos deste valor e dispostos da mesma formam a árvore de decisão.

$$1050 - 50 = 1000 \text{ e } -500 - 50 = -550$$

Precisaremos, neste momento, efetuar alguns cálculos em relação às decisões  $a_1$  e  $a_2$  e, conseqüentemente, em relação aos eventos  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$ , para definirmos com mais exatidão os nós e ramos que caracterizam o maior valor esperado para o processo de tomada decisão.

Supondo que o resultado do programa seja  $\theta_1$  (vide tabela), então calcularemos os ganhos esperados, com relação a  $a_1$  e  $a_2$ .

$$E(G_1/\theta_1) = (1000)(0,4762) + (-50)(0,3810) + (-550)(0,1429) = 378,55$$

$$E(G_2/\theta_2) = (-50)(0,4762) + (-50)(0,7810) + (-50)(0,1429) = -50$$

Deduz-se que a decisão a ser utilizada, tendo em vista o critério *a posteriori* é  $\mathbf{a}_1$  (conversão para geradores a óleo).

Da mesma forma como foi analisado  $\theta_1$  em relação à  $\mathbf{a}_1$  e  $\mathbf{a}_2$ , faremos os cálculos e análises de decisão, observando  $\theta_2$  e  $\theta_3$ .

Com relação a  $\theta_2$  (vide tabela 6). Diante de  $\mathbf{a}_1$  e  $\mathbf{a}_2$ , temos:

$$E(G_1/\theta_2) = (1000)(0,1786) + (-50)(0,2857) + (-550)(0,5357) = -130,32$$

$$E(G_2/\theta_2) = (-50)(0,1786) + (-50)(0,2857) + (-50)(0,5357) = -50$$

Logo, a decisão recomendada sobre o critério em questão é  $\mathbf{a}_2$ .

Finalmente, em relação a  $\theta_3$ , diante das decisões  $\mathbf{a}_1$  e  $\mathbf{a}_2$ , temos:

$$E(G_1/\theta_3) = (1000)(0,0943) + (-50)(0,2264) + (-50)(0,6792) = -290,30$$

$$E(G_2/\theta_3) = (-50)$$

Portanto, a decisão recomendada é baseada nos cálculos acima, é  $\mathbf{a}_2$ .

O próximo passo será o cálculo de  $P(\theta_1)$ ,  $P(\theta_2)$  e  $P(\theta_3)$ , dadas por suas probabilidades totais com o objetivo de fechamento das probabilidades da árvore de decisão, e tomadas de decisão para o nó mais viável em termos de ganho esperado.

Segue, que:

$$P(\theta_1) = P(\theta_1/S_1)P(S_1) + P(\theta_1/S_2)P(S_2) + P(\theta_1/S_3)P(S_3)$$

$$P(\theta_1) = (0,6)(0,25) + (0,4)(0,7) + (0,1)(0,45) =$$

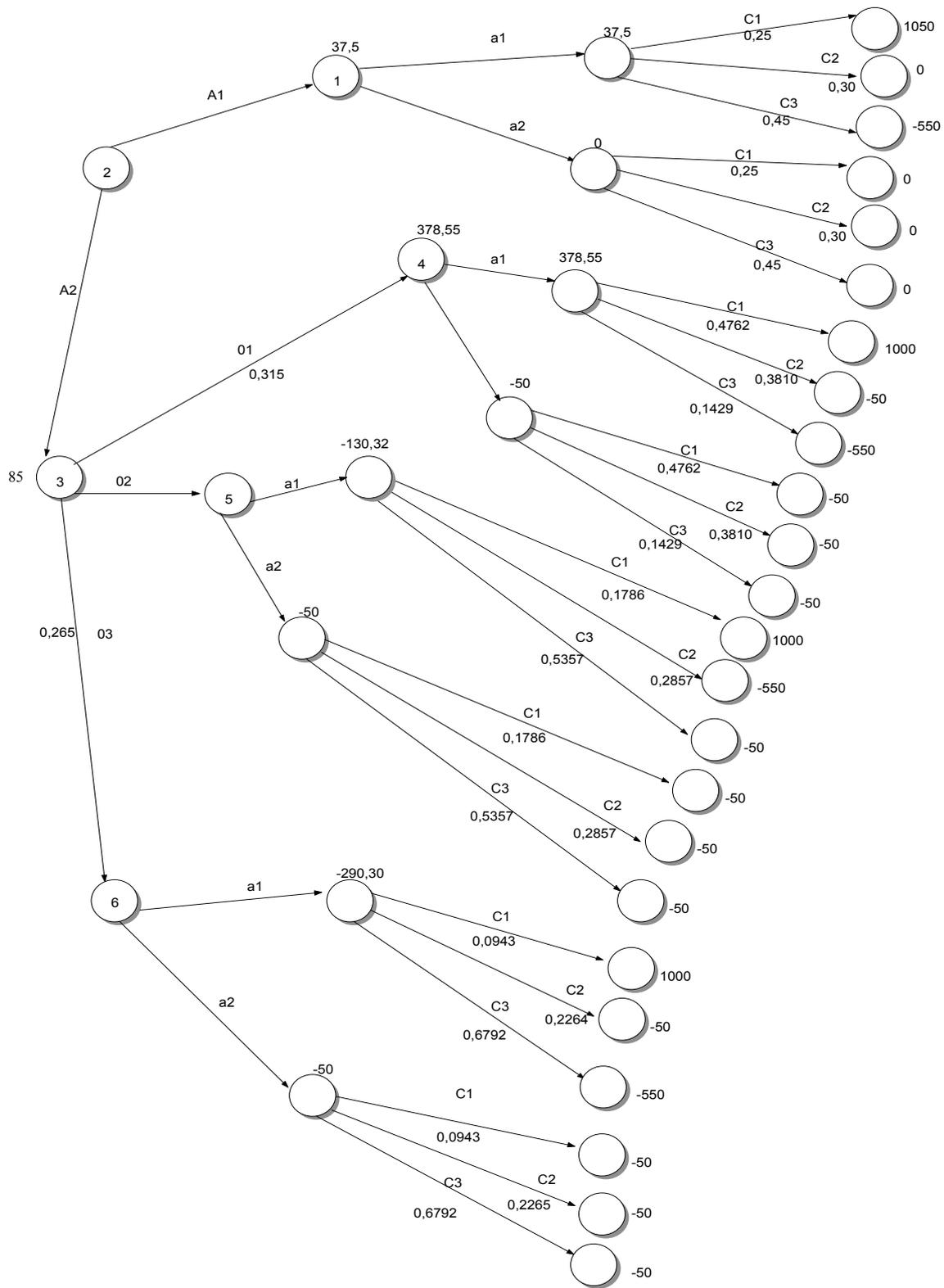
$$P(\theta_2) = P(\theta_2/S_1)P(S_1) + P(\theta_2/S_2)P(S_2) + P(\theta_2/S_3)P(S_3)$$

$$P(\theta_2) = 0,420$$

E finalmente:

$$P(\theta_3) = 0,265$$

Árvore de Decisão: Figura 1



A árvore de decisões apresentada na figura 1, mostra com clareza todo o processo de decisão, acompanhado dos nós e ramos e suas probabilidades. Com base nos cálculos efetuados sob o critério *a priori* e *a posteriori*, verificou-se que a decisão a ser tomada será  $A_{II}$ , e em relação a  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$ , as decisões foram, respectivamente,  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_2$ . Portanto, a decisão por  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_2$  e seus valores ganhos correspondentes, determinam na árvore de decisão os ramos 4, 5 e 6.

Através dos cálculos efetuados, anteriormente, onde:

$$E(3) = (\text{valor nó 4}) P(\theta_1) + (\text{valor nó 5}) P(\theta_2) + (\text{valor nó 6}) P(\theta_3)$$

$$E(\text{nó 3}) = (378,55)(0,315) + (-50)(0,42) + (-50)(0,265) = 84,99 \cong 85 \text{ u.m.}$$

## 6. Conclusão

Comparando o nó esperado no nó 3 ( $E(\text{nó 3}) = 85 \text{ u.m.}$ ) com o ganho esperado ( $E(\text{nó 1}) = 37,5 \text{ u.m.}$ ), verifica-se que o nó 3 apresenta um ganho esperado superior, e portanto, é mais viável e recomendado para a solução do problema, estando também, articulado com a decisão ou caminho  $A_{II}$  (realização do programa piloto).

Portanto, a empresa deve implantar o programa piloto em um primeiro estágio e buscar a conversão para geradores a óleo, dado por  $a_1$ , e observando que o maior esperado é no nó 4 de (378,55 u.m.), considerando  $\theta_1$  (caso em que o programa piloto indica economia).

## 7. Referências Bibliográficas

BUNN, D. Applied decision analysis. Nova York : Mc Graw-Hill, 1984

CASSARO, A.C. Sistemas de informação para tomadas de decisão. São Paulo, Atlas, 2003

HILLER, F.S.; LIEBERMAN, G.J. Introdução à Pesquisa Operacional. 3.ed. Rio de Janeiro:Campus/São Paulo: USP, 1998 .

Goldbarg, Marco Cesar. Otimização Combinatória e Programação Linear : Modelos e Algoritmos. Rio de Janeiro: Elsevier, 2000.

MUROLO, A.C. et al. Pesquisa Operacional. 3.ed. São Paulo, Atlas, 1997.

MUROLO, A.C. et. al. Estatística para os Cursos de Administração e Ciências Contábeis. 2.ed. São Paulo, Atlas, 1997.

SCHEINERMAN, R. Matemática Discreta. São Paulo, Thompson, 2003, 532p.

SOUZA, Acilon Batista. Projetos de Investimento de Capital. São Paulo, Atlas, 2003.