O CONCEITO DE NÚMERO: SUA AQUISIÇÃO PELA CRIANÇA E IMPLICAÇÕES NA PRÁTICA PEDAGÓGICA[1]

Adair Mendes Nacarato[2]

RESUMO

O presente artigo tem por objetivo uma reflexão teórica sobre a aquisição do conceito de número pela criança. Discute-se, num primeiro momento, toda a amplitude do conceito: aspectos históricos, filosóficos e psicológicos, bem como os seus diferentes significados. Discute-se, a seguir, o seu processo de aquisição pela criança e, finalmente, as implicações pedagógicas decorrentes desse processo.

Palavras-chaves: *conceito de número; contagem; aquisição conceitual; ensino e aprendizagem.*

ABSTRACT

This paper aims to do a theoretical reflection on the acquisition of the concept of number by the children. Firstly all the amplitude of the concept is discussed: historical, philosophical and pscychological aspects, as well as its different meanings. In the sequence the process of acquisition by the children is discussed and, the last, the pedagogical implications due to this process.

Keywords: *Concept of Number; Count; Conceptual Acquisition; Teaching and Learning.*

[1] As reflexões teóricas deste artigo fazem parte dos capítulos 2, 3,4 e 5 da Dissertação de Mestrado "A construção do conceito de número na educação escolarizada", por mim defendida em março/95, na Faculdade de Educação/UNICAMP.

[2] Doutoranda em Educação Matemática, Faculdade de Educação/UNICAMP, professora a Universidade São Francisco, campus de Bragança Paulista, e professora do curso de Pedagogia das Faculdades Padre Anchieta.

A AMPLITUDE DO CONCEITO

O conceito de número talvez seja um dos conceitos matemáticos que mais despertou interesse dos pesquisadores, tanto do ponto de vista da história, como da filosofia e da psicologia.

Embora não seja meu objetivo abordar o conceito de número, do ponto de vista histórico ou filosófico, gostaria apenas de fazer uma breve contextualização do tema e buscar na história do conceito, elementos que dêem significados ao processo educativo que o envolve. Partilho da opinião de Moura (1992:31): *"A história do conceito matemático mostra o movimento deste , rumo à sua sistematização e abstração, o que pode tanto ilustrar um possível caminho a ser adotado pedagogicamente quanto revelar o grau de complexidade do conceito"*.

Historicamente, sem dúvida alguma, o caminho percorrido pela humanidade, até se chegar a um sistema de numeração simples e eficiente, excita historiadores e pesquisadores. Na tentativa de se compreender esse percurso, constata-se algumas semelhanças entre o processo de construção histórica do conceito e o processo de aquisição desse conceito pela criança.

Segundo Dantzig, a primeira manifestação do homem, com relação à numeração, foi o que ele denominou senso numérico, ou seja, a faculdade que permite *"reconhecer que alguma coisa mudou numa coleção quando, sem seu conhecimento direto, um objeto foi retirado ou adicionado à coleção"* (Dantzig, 1970: 15). Ifrah considera essa faculdade, uma *"espécie de capacidade natural que chamamos comumente de percepção direta do número ou, mais simplesmente, de sensação numérica"* (Ifrah, 1989: 16). E é por isso que muitos povos antigos ou até mesmo algumas tribos indígenas atuais (Austrália e Brasil, por exemplo) usam, até hoje, palavras em seu vocabulário que designam um, dois, e... muitos.

Se esta faculdade precedeu o próprio conceito de número, pesquisas apontam que crianças pequenas, antes mesmo de adquirirem procedimentos de contagem possuem essa faculdade. Esse fato é demonstrado pela criança pequena, quando em suas brincadeiras, por volta de 1 a 2 anos, consegue perceber a ausência de algum brinquedo, que estava anteriormente em sua coleção. Klahr e Wallace (1973;1976) afirmam que crianças com 5 anos percebem a cardinalidade de coleções com até 3 objetos, sem se utilizar da contagem. A esse fato denominam "*subtizing*". Mandler e Shebo (1980) pesquisaram esse aspecto com adultos e concluíram que estes eram capazes de reconhecer rapidamente, coleções com 1 a 10 elementos, desde que estes estivessem em modelos organizados, enfileirados (exemplo: um modelo retangular de 4 pontos é prontamente reconhecido). (apud Bergeron & Hercovics, 1990)

O surgimento da contagem e dos números está relacionado a necessidades práticas: o homem passa a ter necessidade de controlar seus pertences. Começam-se então os processos de correspondência um-a-um, seguidos pela prática de marcas ou entalhes, utilização do corpo para contagens por agrupamentos e o registro dessas contagens.

A criança, principalmente quando inicia o processo de escolarização, ao deparar com uma situação que requer contagens, ela lança mão de algum elemento concreto: objetos, risquinhos (ou outros sinais gráficos) e os dedos (contar utilizando os dedos é uma prática que a criança usa por bastante tempo e, às vezes, até mesmo em idade adulta). A criança demora para sentir a necessidade de contar por agrupamentos; se ela está diante de uma coleção de quantidades discretas, ela vai afastando um a um seus elementos e fazendo a contagem sequencial; se ela está diante de uma representação gráfica de uma coleção, ela também tenta, às vezes sem sucesso, fazer a contagem sequencial.

Assim como o homem utilizou os símbolos numéricos, a partir de suas necessidades de controlar quantidades, e os numerais escritos apareceram concomitantemente com o aparecimento da escrita, Moura defende que, para que a criança construa o signo numérico com significado, ela deve ser colocada diante de situações, em sala de aula, que exijam resolução de problemas de comunicação de quantidades. E o processo de aquisição do signo numérico mantém uma dependência mútua com o processo de alfabetização na língua materna e, exige tanto o aspecto qualitativo quanto o quantitativo, ou seja, a escrita numérica representa qualidade e quantidade:

...é nome que representa a qualidade de ser, por exemplo, 6 bonecas e não 6 sapatos; e nome que representa quantidade: 6 bonecas

é diferente de 5 bonecas, 6 é maior que 5 e menos que 7; é representação de quantidade desprovida de qualidade: "6" é a representação do fonema "seis" e pode ser descrito pelo signo lingüístico: "6" é o mesmo que "seis". (Moura, 1992:44).

O surgimento dos números, ligado à atividades práticas marcou não apenas a História como também a Filosofia de Matemática. A teoria dos números (Aritmética, para os gregos) só recebeu um tratamento axiomático satisfatório a partir do século XIX. Embora os livros VII, VIII e IX dos "Elementos" de Euclides constituem uma tentativa de axiomatizar as propriedades dos números, ainda que não as regras de se operar com os números (a chamada Logística, pelos gregos, e considerada menos nobre), esta se mostrou insatisfatória.

Em fins do século passado, Peano, matemático italiano organizou o primeiro corpo axiomático, contendo cinco axiomas, na tentativa de organizar as leis fundamentais dos números naturais. *Os axiomas de Peano, postos em palavras são estes*:

1. zero é um número natural;

2. o sucessor imediato de qualquer número natural é também um número natural;

3. números naturais distintos nunca têm o mesmo sucessor imediato;

4. zero não é sucessor imediato de qualquer número natural;

5. se algo vale para zero e, valendo para um dado número, também vale para o seu sucessor imediato, valerá, ainda, para todos os números naturais.

(Barker, 1969: 80)

Para Costa (1977:10), *"Dos axiomas de Peano podemos deduzir todas as proposições usuais da aritmética elementar. Analogamente, todas as idéias comuns da aritmética são definíveis em função dos conceitos primitivos de Peano"*.

Ainda no final do século XIX, o matemático alemão George Cantor desenvolve a teoria dos conjuntos, criando assim uma aritmética que engloba números infinitos e transfinitos. Sua teoria engloba os números cardinais finitos (números naturais) e os infinitos, definindo também as operações com os números cardinais, obtendo assim a aritmética elementar.

Os trabalhos de Peano e Cantor, além de outros como Dedekind, Weirstrass e Boole, influenciaram o surgimento do logicismo, cuja tese fundamental se resumia a: *"as leis da Aritmética e todo o resto da matemática dos números se relacionam às leis da Lógica da mesma forma que os teoremas da Geometria se relacionam a seus axiomas"*. (Barker, 1969: 107).

O mais eminente representante do logicismo foi Bertrand Russel, embora o filósofo alemão Frege tenha sido o seu precursor e cujas teses foram consideradas por ele. Em seu trabalho mais célebre, a obra *Principia Mathematica*, em 3 grandes volumes, publicados em 1910, 1912 e 1913, Russel, com a colaboração de Whitehead, estabelece de maneira minuciosa a sua tese logicista. Nessa obra, eles trabalham uma série de definições dos termos básicos da teoria dos números e, o próprio conceito de número: *"Um número é algo que caracteriza certas coleções, isto é, aquelas que têm aquele número"* ou, *"Número é um modo de reunir certas coleções, isto é, as que têm um dado número de termos"* ou ainda, *"Um número é qualquer coisa que seja o número de alguma classe"* (Russel, 1974:18, 21, 25). Assim, o número passa a ser definido como classes e os números naturais (cardinais) como certas espécies de conjuntos de conjuntos ou classes de classes.

A aproximação da aritmética com a lógica, não de formas unilaterais, mas recíprocas, é defendida por Piaget, que ainda tenta estabelecer conexões com a psicologia. Piaget questiona o reducionismo de Russel, do número cardinal a classes de classes de equivalência e, conclui, a partir de suas pesquisas, que o número cardinal é a síntese das estruturas de classes e das de seriação e que há uma construção simultânea e independente das estruturas de classes, de relações e de números.

Assim, para Piaget, a simples capacidade do sujeito de efetuar enumerações verbais (que ele considera equivocadas do ponto de vista operatório) não é condição para a aquisição do número mas, que o sujeito:

1) seja capaz de igualar duas coleções pequenas (de 5 a 7 elementos) por correspondência biunívoca entre seus termos, e 2) que pense que tal equivalência se conserve no caso de, sem acrescentar nem retirar nenhum elemento, simplesmente se modifique a disposição espacial de uma das coleções, de modo que seus elementos elementos não fiquem em correspondência (Piaget, 1981:284).

Para Piaget o desenvolvimento do conceito de número está relacionado ao conhecimento lógico-matemático que ele distingue do conhecimento físico. Enquanto o primeiro está relacionado à experiência física, o segundo está relacionado à experiência lógica-matemática. Tanto o conhecimento físico quanto o lógico-matemático requer abstrações: a abstração empírica e a abstração reflexiva, respectivamente. Kamii sugere o termo "abstração construtiva" como substituto ao abstração reflexiva, uma vez que ela é construída na mente do sujeito; as relações entre os objetos não têm existência externa. Segundo Piaget, essas abstrações são independentes: uma não existe sem a outra. A criança só pode construir o conhecimento físico se ela possuir um sistema lógico-matemático construído que lhe permita relacionar novas observações ao conhecimento já existente.

Portanto um sistema de referência lógico-matemático (construído pela abstração reflexiva) é necessário para a abstração empírica, porque nenhum fato poderia ser "lido" a partir da realidade externa se cada fato fosse um pedaço isolado do conhecimento, sem nenhuma relação com o já construído numa forma organizada (Kamii, 1986:18)

A abstração reflexiva, por sua vez, envolve dois processos: 1) "*réflechissement*" onde há uma projeção sobre um nível superior do que foi tomado de um nível inferior; 2) "*reflexão*"onde os elementos retirados do plano anterior se reorganizam em uma nova totalidade de representação e formas.

Piaget ainda analisa outro tipo de abstração: a refletida que ocorre quando os resultados da abstração se formam e o pensamento se torna reflexivo.

Dessa forma, o conceito de número é construído a partir da abstração reflexiva e requer conceitos lógicos como: conservação, inclusão e seriação.

Bergeron & Hercovics, ao analisarem a teoria de Piaget sobre a formação do conceito de número, afirmam que: *"Embora Piaget admitisse que certas habilidades quantitativas, como contagem, são adquiridas antes de todo o desenvolvimento desses conceitos lógicos, ele sustentava que elas ganham significado somente através da aplicação desses conceitos"* (Bergeron & Hercovics, 1990: 35).

Na década de 70, surgiram alguns trabalhos que, de certa forma, se contrapõem aos de Piaget, nos aspectos acima citados (Klahr & Wallace, 1976; Schaeffer, Eggleston & Scott, 1974 e Young & McPherson, 1976). Esses autores postularam três processos distintos de quantificação: "subtizing": momento de reconhecimento do número associado com a configuração dos elementos de uma coleção. Esta seria a primeira habilidade adquirida pela criança e a base de outros processos; contagem e estimação: são habilidades que se desenvolvem concomitantemente, embora a estimação alcance maturidade depois da contagem. Esses processos ou habilidades têm por função *"gerar quantidade ou "símbolos" de numerosidade de conjuntos para manipulação mental"* (Bergeron & Hercovics, 1990: 35).

Para Bergeron & Hercovics (1988) uma alternativa possível seria unir a teoria de Piaget com as citadas acima, rompendo com a dicotomia conhecimento lógico-matemático e conhecimento físico. Dessa forma, se distinguiria o lógico-físico (pensamento sobre o mundo físico ou procedimentos aplicados a objetos físicos ou transformações físico-espaciais) do lógico-matemático (aplicado a procedimentos ou transformações que lidam com objetos matemáticos). Os autores exemplificam essa distinção:

Uma criança estabelecendo a correspondência um-a-um entre dois conjuntos de objetos poderia ser considerado como estabelecendo evidência de compreensão processual de natureza lógico-físico, enquanto que uma correspondência entre um conjunto de objetos e a sequência número-palavra poderia ser qualificada como uma compreensão processual de natureza lógico-matemática. (Bergeron & Hercovics, 1990: 36).

Partindo dessa premissa, esses autores definem números em termos de suas funções e usos:

Inicialmente, os números foram usados para responder duas questões distintas. "Quantos objetos há numa dada coleção?" e "Qual é a posição de um objeto numa coleção ordenada?" Mas bem antes das crianças terem algum conhecimento número, elas podem distinguir entre um e muitos objetos. Suas habilidades para perceber muitas unidades físicas é tudo que é necessário para sua concepção de pluralidade. Nesse sentido, o número em sua função cardinal pode ser visto como uma medida de pluralidade. Similarmente, as crianças estão conscientes da posição de um objeto numa coleção ordenada mesmo sem serem capazes de determinar sua posição numericamente. Assim no seu sentido ordinal, o número como posição pode ser visto como uma medida de posição numa coleção ordenada. Nossa definição de número responde à necessidade para distinguir entre o que Gelman chama de "numerosidades" (coleções que são qualificadas) e numerosidades não especificadas. (Bergeron & Hercovics, 1990:36).

Nesta perspectiva, não há contradições entre as teorias de Piaget e Klahr & Wallace, mas complementaridades. Assim, para a aquisição de número são necessários não somente os conceitos lógicos de conservação, inclusão e seriação mas também procedimentos de contagem (aspecto cardinal e ordinal do número). Assim, a estrutura do conhecimento numérico teria como base as habilidades da criança para contar (trabalhos de Fuson, Richards & Briars que serão analisados em momento posterior de nosso trabalho).

Hans Freudenthal, no capítulo XI do livro "Mathematics as an Educational Task", expõe sua concepção sobre o conceito de número. Para ele, há muitos conceitos de número, ou seja, do ponto de vista do conteúdo e forma, da metodologia, da genética e da didática e, desenvolve seu trabalho do ponto de vista metodológico. Sob este ponto de vista, ele apresenta o número sob quatro enfoques: número-contagem, número-numerosidade, número-mensuração e número-cálculo.

O número do ponto de vista da contagem tem na seqüência numérica a sua sustentação. Segundo Freudenthal, a seqüência numérica é a pedra fundamental da Matemática, historicamente, geneticamente e sistematicamente e, sem ela não haveria a matemática. A criança conta (recita a seqüência numérica) mesmo que não haja necessidade para isso. E mais tarde, ao somar ou subtrair, ela realiza contagens, ou seja, a adição é uma contagem continuada e a subtração é "contar para trás". A contagem, presente na mais elementar aritmética, era um princípio fundamental das antigas didáticas e, que tem sido negligenciado pelas novas matemáticas. Além da contagem "para frente e para trás", também as contagens sistemáticas como contar de dois em dois, de três em três, de dez em dez, etc., exercitadas na aritmética tradicional, preparavam a aritmética mental facilitando a algoritmização e a aritmética escrita.

Para Freudenthal, a simples contagem, sem a descoberta do infinito nada representaria para a matemática.

Assim a exclamação *"e assim por diante"*[3] *é a primeira matemática produzida pela humanidade e que os indivíduos ainda estão produzindo. É a maior e mais importante, é a primeira e a última, a mais sofisticada e a mais profunda matemática"* (Freudenthal,1973:173).

O conhecimento da infinidade, ou seja, do "assim por diante" é operativo em toda a instrução matemática; é formalizado na indução completa e, principalmente, nos axiomas de Peano.

Dessa forma, o número-contagem está presente em diversos níveis e, em cada um deles, deve ser tratado com o rigor correspondente a esse nível.

O número, enquanto numerosidade é formalizado matematicamente como potência ou cardinal de um conjunto. Parte-se assim, da teoria de Cantor para descrever conjuntos equipotentes: a potência ou cardinal de um conjunto é o que há de comum entre este conjunto e todos os conjuntos equipotentes. Dentro dessa concepção, para se comparar dois

[3] O autor narra uma experiência vivenciada numa pré-escola Montessoriana, onde uma garota escrevia números numa tira de papel. Quando a tira acabava, colava-se uma nova tira e a atividade continuava. No 3º dia da atividade, ela já havia passado de 1000 e, ao chegar em 1024, já desinteressada, ela diz "e assim por diante", e pergunta "não é?".

conjuntos, conta-se os elementos de cada um deles: se tiverem o mesmo número de elementos, eles säo equipotentes e, se ao contar, um deles terminar antes que o outro, este é menos potente. Assim, os números naturais são definidos a partir dessas comparações.

Freudenthal rejeita a posição acima, considerando-a insuficiente matematicamente e didaticamente e é irrelevante se comparada com o aspecto da contagem. Para ele "na gênese do conceito de número, o número-contagem ocupa o primeiro e mais significativo papel" (p.191). A numerosidade é apenas um dos muitos aspectos do número e, corresponde ao fato de que o número-contagem é invariante sob funções bijetoras. Mas, nada indica que a criança constitui o número a partir deste fato de invariância. A criança adquire o número-contagem e, num momento qualquer, ela percebe, entre outras coisas, a invariância do número, como por exemplo: se, amanhã, contar novamente os dedos da mão, encontrará 5; que, todos os homens têm o mesmo número de algumas coisas: dedos, olhos, orelhas, etc. Dessa forma, deve-se evitar a tendência de se trabalhar o conceito de número apenas sob o aspecto da numerosidade, negligenciando a contagem. Neste aspecto, ele cita Piaget, destacando que, este foi um dos pesquisadores que mais desenvolveram o conceito de número enquanto numerosidade, acreditando que o conceito de número natural poderia ser totalmente derivado de potências. Mas, para Freudenthal, tanto Piaget como outros matemáticos que acreditam que o número natural se origina de potências, tacitamente e inconscientemente, pressupõem o número-contagem.

Freudenthal dá uma maior ênfase, ao conceito de número enquanto mensuração. O próprio número-numerosidade é uma medida possível para conjuntos mas, por outro lado, muitas coisas que são medidas não são conjuntos: são quantidades e grandezas. Para se contar pessoas, por exemplo, são necessárias unidades naturais; para se medir quantidades, necessita-se de um padrão e, o resultado do procedimento de medida é um número, com medida de quantidade.

Quanto ao aspecto número-cálculo, o autor enfatiza não o significado do número mas a sua operacionalização. A contagem e o cálculo são muito antigos na história, e, o cálculo surgiu antes dos números indo-arábicos. Neste enfoque, o número é compreendido operacionalmente, por regras, e, através de extensões do domínio numérico, novos números são introduzidos, privilegiando-se o seu aspecto funcional. Num momento posterior, os números surgem como elementos de anéis e corpos, axiomatizados.

O trabalho de Freudenthal evidencia, sem dúvida alguma, a amplitude do conceito de número: desde as situações mais corriqueiras de contagem, até o conceito de números transfinitos e infinitos, de reta real e axiomatização da aritmética: anéis e corpos. Talvez por essa amplitude toda, é que este tema tem sido objeto de tantas discussões e pesquisas.

A aquisição do conceito de número pela criança:

Não se pode analisar o processo de formação do conceito de número na educação escolarizada, sem considerar que a criança, ao iniciar a escolarização, traz consigo as influências do meio social pois, desde pequena, ela já é colocada em confronto com os vários significados do número.

Para Bergeron & Hercovics (1990), as construções numéricas têm raízes biológicas pois desde pequena, a criança já demonstra discriminações "numéricas" tanto visuais como por seqüências rítmicas, além de gastarem bom tempo construindo correspondências um-a-um, ao enfileirar seus brinquedos, colocá-los em caixas, etc. Estas atividades seriam a fonte das operações lógico-matemáticas e das físico-espaciais. Mas, nessa fase inicial não há associação entre esses tipos de atividades e o pensamento lógico-matemático.

Não há dados que confirmem as idades em que essas manifestações aparecem, mas, entre essa fase inicial e a recitação de seqüências numéricas, há a manifestação do senso numérico (Dantzig) ou "subtzing" (Klahr & Wallace), já descritas neste artigo.

Para Fuson e Hall (Fuson e Hall, 1983) os significados do número são: seqüências de palavras, contagem, símbolos numéricos, aspecto ordinal e cardinal, medida e código ou categorização. Estes autores, revisando a bibliografia existente, realizaram pesquisas com crianças de baixa idade, sobre a evolução na aquisição desses significados e a interelação entre eles.

A primeira manifestação da criança a esses significados é quando ela recita seqüências numéricas, na ordem convencional (um, dois, três, etc.)

sem que esta esteja ligada a nenhuma contagem. Essas seqüências podem ser reproduzidas espontaneamente, ou em resposta a uma solicitação ou de forma lúdica, quando a criança canta ou recita versos em que aparecem tais seqüências. Fuson, Richards e Briars (apud Bergeron & Hercovics, 1990) descreveram níveis nos significados das seqüências relacionais e nas habilidades sequenciais que envolvem produções mais complexas, destacando que, no início, as seqüências produzidas têm significado relativo e, posteriormente, tornam-se objeto de pensamento e podem ser usadas como ferramenta representacional em contextos numéricos, especialmente em contextos de contagens. Estes autores assinalam cinco níveis nessa evolução: 1º nível "*string*": as palavras são recitadas, como que seguindo uma direção para frente, conectadas mas indiferenciadas do todo; 2º nível "*umbreakable list*": a recitação ainda é dirigida para a frente mas só pode ser produzida se começar pelo início; 3º nível "*breakable chain*": agora a recitação já pode começar de um ponto arbitrário, sem ser o início; 4º nível "*numerable chain*": as palavras começam a ser abstraídas, tornando-se unidades no sentido numérico e, podem representar uma situação numérica a ser contada e comparada; e 5º nível "*bidirectional chain*": as palavras se tornam flexíveis, podendo ser produzidas facilmente e, em qualquer direção

A próxima manifestação seria a contagem. Para Dantzig *"foi a contagem que consolidou o concreto e portanto as noções heterogêneas de pluralidade, tão características do homem primitivo, no conceito numérico homogêneo abstrato, o que tornou possível a Matemática"* (Dantzig, 1970:19).

Sem dúvida, a contagem representa uma ação concreta pois esta exige um conjunto de elementos definidos, que existem no tempo e no espaço. Agora, a palavra (antes usada para recitar seqüências numéricas) tem um referente - o elemento contável da coleção; cada elemento contável está em correspondência com um e somente um termo da seqüência verbal.

Fuson e Hall (1983) afirmaram que a correspondência da palavra e termo contável é frequentemente completada pelo ato de apontar e, esse ato exige três momentos de correspondência:

- correspondência, no tempo, entre a palavra e o ato de apontar;

- correspondência, no espaço, entre o ato de apontar e o elemento da coleção e

- resultado da correspondência da palavra e do elemento.

Assim, o ato de apontar cria uma unidade espaço-tempo, conectando a entidade, ou elemento existente no espaço e a palavra existindo no tempo.

Descobertas feitas por Briars e Seigler (apud Fuson e Hall, 1983) indicam que o ato de apontar é parte importante da concepção de contagem da criança e, existe um progresso no desenvolvimento da contagem, onde, no princípio a criança considera que a contagem requer as três correspondências: palavra, elemento e o apontar e, posteriormente, compreende que a contagem é derivada da correspondência palavra-elemento.

O ato de apontar, segundo as pesquisas de Fuson e Mierkiewicz (apud Fuson e Hall, 1983), passam por um processo de internalização, que ocorre com a idade. Suas pesquisas revelam que crianças de 3-4 anos, usualmente tocam os objetos ao contar e, somente aos 4-5 anos os apontam, embora tenham encontrado crianças de 5 anos, contando sem apontar. Posteriormente, a criança já em idade escolar, olha fixamente para os objetos ao contar, sem nenhum gesto externo de apontar.

Steffe, Richards e Glasersfeld (1981, apud Fuson e Hall, 1983) estavam preocupados com as representações internas envolvidas no ato de contar. Para eles, a contagem consiste da produção da palavra e do elemento unitário de contagem, onde este elemento é uma construção mental, ou seja, algum ato de representação interna constitui a unidade que é contada.

Observaram também que há um desenvolvimento progressivo do concreto para o abstrato, onde os elementos contáveis passam a ser entidades abstraídas progressivamente, não necessitando mais de sua apresentação física.

O processo de contagem é pois mediado pelo ato indicativo e pela palavra.

Partindo-se de uma coleção com elementos discretos, para se realizar a contagem inicia-se a correspondência elemento-palavra, e, nesse momento, outros significados aparecem: os aspectos cardinal e ordinal do número. Estes dois aspectos, segundo Dantzig (1970, p.21) acabam se confundindo. O aspecto cardinal é aquele que fornece a numerosidade (a quantidade de elementos) de uma coleção, ou seja, a última palavra dita num procedimento de contagem. Trata-se, sem dúvida, de uma idéia abstrata pois um mesmo cardinal pode ser associado a conjuntos equipotentes, independendo da espécie dos elementos, bem como, à última palavra da contagem da numerosidade. Normalmente, a criança ao terminar a contagem de uma coleção, se solicitada a responder à questão: quantos elementos há nessa coleção?, ela necessita recontá-la. Para Gelman e Gallistel (apud Fuson e Hall, 1983), o princípio de cardinalidade só ocorre quando:

1. a criança tem habilidade para responder prontamente à pergunta: Quantos?, após a contagem de uma coleção;

2. pronuncia a última palavra com ênfase;

3. repete o último termo na contagem; e

4. não necessita de recontagem para dar o cardinal da coleção.

O aspecto ordinal acaba se confundindo com o cardinal pois, para que se chegue a este, os objetos da coleção devem ser contados e ordenados, portanto organizados numa seqüência que progrida em ordem crescente. Para contar, a criança tem de passar de um cardinal a seu sucessor - e este é o aspecto ordinal. Ao se fazer a contagem, o aspecto ordinal é que prevalece, não havendo mais a necessidade de um conjunto-padrão para a correspondência. Assim, numa coleção de 4 elementos, o quarto elemento, numa contagem sequencial, corresponde ao cardinal 4.

Assim, a cardinalidade de uma coleção pressupõe a contagem e, os elementos devem ser organizados sequencialmente, onde cada elemento corresponde a uma palavra da seqüência oral.

Para Vérgnaud (1988), contar corretamente supõe: o reconhecimento de unidades distintas, a colocação em correspondência dessas unidades com as perceptivo-motrizes (mão e olho) que, por sua vez, devem estar em correspondência com as unidades verbais (seqüências de palavras-números). Supõe ainda o princípio da cardinalização (o último número pronunciado denota não apenas o último objeto mas o total de objetos da coleção). A contagem constitui um esquema complexo, uma totalidade organizada. Esse esquema

necessita de significantes (coordenação olho-mão-emissão vocal) e das construções conceituais (objeto, coleção, cardinal) irredutíveis às palavras e às coordenações perceptivo-motoras: o objeto é construído anteriormente à aparição da conduta de contagem, mas a coleção e o cardinal são construções conceituais associadas à contagem" (Vérgnaud, 1988:246).

Para Piaget e seus colaboradores não basta a fusão dos aspectos cardinais e ordinais (ou assimilação recíproca desses aspectos) mas, o número *"é uma síntese de dois tipos de relações que a criança elabora entre os objetos (por abstração reflexiva). Uma é a ordem e a outra é a inclusão hierárquica"* (Kamii, 1986: 19). Só a ordenação não garante o número, pois não se pode quantificar uma coleção apenas com seus elementos organizados, se considerados apenas um de cada vez. É necessário que cada elemento a ser contado seja incluído na coleção anterior, já ordenada e contada. Assim, o 1 será incluído no 2, o 2 em 3, ... numa estrutura hierárquica.

A contagem ainda exige a invariância do número. Não basta a criança contar uma coleção, distinguindo nela o aspecto cardinal e ordinal mas, é necessário que ela compreenda que a disposição dos elementos na coleção não altera a quantidade total, ou seja, é necessário que o raciocínio físico-lógico se transforme em lógico-matemático.

Para Vérgnaud (1988) não tem sentido falar em conceito mas em campo conceitual pois não se pode analisar um conceito isoladamente sem se referir ao contexto em que ele aparece, aos variados aspectos a ele relacionados. Que aspectos pois estariam relacionados ao conceito de número para que se possa pensar num campo conceitual?

Os aspectos anteriormente citados estão em consonância com as pesquisas de Vérgnaud, onde ele destaca que existem várias situações envolvidas no conceito de número:

- procedimentos de contagem - o número concebido como quantidade;

- um mesmo símbolo denotando situações diferentes: número enquanto quantidade, enquanto medida, enquanto resultado de uma transformação de uma relação, etc.

Os símbolos numéricos ou signos numéricos foram construídos socialmente, a partir da necessidade do homem de registrar quantidades. Foi um processo que evoluiu gradualmente, até chegar ao sistema de numeração indo-arábico, aceito universalmente. Trata-se de um sistema convencional e como tal deve ser compreendido pela criança. A compreensão e posse do signo numérico e as suas combinações para representar quantidade é que permitirá à criança operar com quantidades. Para Moura,

Não é só a capacidade de calcular que dá à criança o "status" de estar alfabetizada numericamente. Este "status" é adquirido quando a criança distingue perfeitamente o conjunto de regras que caracterizam o sistema de numeração. Estar de posse do número é perceber que [: . :] pode ser representado pela palavra (cinco) ou pelo numeral 5. É ter claro que 25 significa a representação de uma quantidade que é 2 dezenas e 5 unidades, pois o "dois" ocupa uma posição que lhe dá o "status" de dezena. Se fosse 52 ele receberia o "status" de unidade e significaria apenas 2. (Moura, 1992: 42).

Aprender o nome dos números e a sua grafia é uma das primeiras tarefas que a criança executa ao iniciar sua escolarização. Por outro lado, pesquisadores (Allardice, 1977; Sastre & Moreno, 1976; A. Sinclair, Siegriest & H. Sinclair, 1983; J. C. Bergeron, Hercovics e A. Bergeron, 1986) têm se interessado pelas representações escritas dos números, por crianças de baixa idade e, têm constatado que, bem antes de receber alguma instrução formal, as crianças já possuem algum domínio de notação posicional, ou seja, a concatenação de dígitos e sua percepção global (Não vêem 12 como 1 e 2 mas como doze). Bergeron & Hercovics (1990) destacam três níveis no processo de aquisição de notação posicional:

1º justaposição: a criança tem consciência de que os dígitos são escritos lado a lado mas, sua posição relativa ainda não é importante;

2º cronológico: a escrita é feita da direita para a esquerda (ao escrever 12, como a criança começa pela direita, ela escreve 21); e,

3º convencional: a criança é capaz de escrever números com dois dígitos na ordem convencional, mesmo quando ela escreve da direita para a esquerda.

Ao tomar contato com esses símbolos numéricos e suas representações a criança inicia sua alfabetização matemática. Para Moura (1992), para que a criança compreenda a escrita do número ela deve fazer várias sínteses, ou seja, ao ouvir a palavra três ou lhe ser mostrado três objetos ela deverá compreender que: isso significa uma quantidade, que é o nome dado a todas as coleções que podem ser colocadas em correspondência biunívoca com aquela denominada "três", que o 3 ocupa um lugar numa série, que o fonema "três" é representado por "3" e que "3" é o signo de três. E mais, compreender o signo numérico é fazer ligação simbólica entre letras e sons e, a escrita numérica representa qualidade e quantidade.

Como os conceitos partem dos mais concretos para os abstratos, nos primeiros anos de escolarização a criança ainda necessita, muitas vezes, de situações contextualizadas. Progressivamente, ela já é capaz de utilizar um número natural de maneira abstrata, descontextualizada. A criança necessita de um certo período de tempo para que o conceito seja formado.

Vérgnaud (1988) defende que os conceitos são formados no decorrer de um longo período de tempo, isto é, exigem um período de maturação (do conceito) e, o que vai permitir a formação desses conceitos são as situações vividas pela criança. Essas situações dão significado ao conceito, permitindo à criança estabelecer relações e promover extensões do conceito chegando a níveis mais generalizados. O conceito se forma através de interações e, essas interações, numa educação escolarizada, ocorrem com o professor e os colegas de grupo. As situações que ocorrem no contexto escolar irão favorecer a formação do conceito de número natural.

Para Vygotsky (1989: 87):

... as diferentes etapas na aprendizagem da aritmética podem não ter o mesmo valor para o desenvolvimento mental. Muitas vezes três ou quatro etapas do aprendizado pouco pouco acrescentam à compreensão da aritmética por parte da criança, de depois, da quinta etapa, algo surge repentinamente: a criança captou um princípio geral, e a curva do seu desenvolvimento sobe acentuadamente. Para essa criança específica, a quinta operação foi decisiva, mas isso não pode ser considerado uma regra geral. O momento crucial em que o princípio geral se torna claro para a criança não pode ser antecipado pelo currículo. A criança não aprende o sistema decimal como tal, aprende aprende a escrever números, a somar e a multiplicar, a resolver problemas; a partir disso, algum conceito geral sobre o sistema decimal acaba por surgir.

Cada princípio mais geral que a criança capta ela atinge um nível mais generalizado do conceito de número. Assim, ao final da 1ª série do Ensino Fundamental, pressupõe-se que a criança tenha desenvolvido os seguintes níveis do conceito de número: 1) senso numérico; 2) correspondência um-a-um / comparação; 3) seqüências numéricas; 4) cardinalidade / ordinalidade; 5) contagem; 6) invariância; 7) inclusão; 8) número natural; 9) agrupamentos em bases não-decimais; 10) sistemas de numeração; e 11) sistema de numeração decimal

O desenvolvimento desses níveis não é um processo linear; o fato de estarem seqüenciados acima, não significa linearidade. Sabe-se apenas que a primeira manifestação é o senso numérico e que todos esses níveis são necessários ao conceito de número natural. Assim, pressupõe-se que eles ocorrem simultaneamente e, muitas vezes, a captação de um princípio mais geral acelera outros inferiores ainda não captados.

Além desses níveis, o contato da criança com outros significados do número: o número enquanto medida, resultado de uma operação, código, ordenação, localização espacial e, posteriormente com as ampliações dos naturais para racionais e inteiros, permitirá à criança realmente chegar ao conceito de número natural. Este seria o campo conceitual de número.

Como o próprio Vérgnaud (1988) reconhece, o número natural reflete a concepção de quantidade muito mais do que a de transformação ou relação. Mas, para que se tenha o conceito de número natural formado é necessário que este seja identificado como número positivo, relações, transformações e medidas.

IMPLICAÇÕES PEDAGÓGICAS

Não há dúvidas de que a contagem, bem como a aquisição do conceito de número é um processo que se inicia antes da escolarização da criança e que tem continuidade com ela. Por outro lado também, acredita-se no papel fundamental que a escola tem para o desenvolvimento dos conceitos científicos na criança. Isso porque, como citado acima, ao se fazer alusão aos trabalhos de Fuson e Hall , a instrução que a criança recebe fora do ambiente escolar, é importante fonte potencial para o desenvolvimento da cardinalidade, mas é um processo inconsciente, por parte de quem a transmite. Se é um processo inconsciente, a aquisição de conceitos relativos à contagem, faria parte dos conceitos espontâneos ou cotidianos (dentro da perspectiva teórica de Vygotsky), exatamente porque são adquiridos sem nenhum processo deliberativo de instrução. Já os conceitos adquiridos em situações de ensino, são os chamados científicos, visto que há uma orientação deliberada e explícita por parte do professor. Os conceitos científicos requerem operações lógicas, como: classificação, comparação, ordenação,dedução, indução,etc. E, estes conceitos, certamente fazem parte do campo conceitual de número, discutido anteriormente.

Ao enfatizar a importância da escola, no processo de formação do conceito de número, já se está explicitando a uma concepção de aprendizagem, ou seja, a instrução provoca avanços, o que não ocorreria de forma espontânea. Acredita-se num movimento dialético entre aprendizagem e desenvolvimento, onde a primeira favorece o segundo e, este por sua vez, possibilita novas formas de aprendizagem.

Evidencia-se assim o papel fundamental da escola e do professor na construção do conhecimento dos alunos; à escola compete a transmissão do conhecimento científico elaborado, com os significados coletivos organizados culturalmente; ao professor compete a tarefa de ser um desencadeador desse processo, de propiciar um ambiente de negociações de significados aos alunos.

Na busca de significados, o aluno recorre a noções mais primitivas que conseguem explicar a situação que ele está vivenciando. Assim, na busca de significados para os conceitos científicos, o aluno busca sentido nos conceitos cotidianos que ele já tem construído ou que estão em processo de construção.

Considerando esses pressupostos na aquisição da contagem e do conceito de número, diria que a criança constrói alguns significados para esses conceitos, independente da escolarização, mas esta, sem dúvida, amplia tais significados, fazendo com que o aluno possua um campo conceitual mais amplo, que lhe permita estabelecer relações mais rapidamente, entre os conceitos nele envolvidos.

Por outro lado, se a contagem, historicamente, surgiu da necessidade da humanidade de controlar os seus pertences, a minha experiência com a educação infantil e Ensino Fundamental, parece apontar que isso nem sempre acontece. Constato, nas práticas pedagógicas que vivencio, ou nos livros-textos voltados a essa faixa etária, que é dada pouca ênfase à contagem e, quando esta é trabalhada, limita-se a situações mecanizadas que até mesmo subestimam a capacidade das crianças.

O próprio Freudenthal salientou o quanto a contagem tem sido desconsiderada das didáticas modernas, o que não deveria ocorrer pois esta é sustentação do pensamento aritmético.

Diante disso, defendo a necessidade de uma maior ênfase aos conceitos relacionados à contagem e, a própria contagem em si, tanto na educação infantil, quanto nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Mesmo que a criança já tenha passado por experiências educacionais, na educação infantil, o professor da 1ª série não pode pressupor que ela já tenha o processo de contagem consolidado. Isto porque, o processo não ocorre da mesma forma para todas as crianças.

Ressalto ainda a necessidade da presença constante de situações de contagem nas salas de aula. Mas que estas situações sejam dinâmicas, que despertem o interesse das crianças e façam com que elas sintam a necessidade de usar contagens, símbolos numéricos, registros de quantidades, etc. Moura , em seus trabalhos, tem salientado a importância do jogo como um possível caminho metodológico para a construção do signo numérico. *"Defendemos uma construção do signo numérico com significado e isto para a criança pré-escolar só pode ser justificado pela necessidade que ela tem de resolver problemas de comunicação das quantidades"*. (Moura, 1992: 49). E o jogo surge como uma situação onde a criança tem a necessidade de guardar quantidades (os pontos que obteve, por exemplo) e, com isso ela chega ao número (ou à representação numérica). Completando a idéia acima, diríamos que, na maioria dos jogos em que aparecem quantidades (dominó,baralho,dado,varetas,etc),aparece também a contagem.

Kamii também sugere o uso de jogos em situações de quantificação, onde a criança não apenas se utiliza de recursos numéricos, como também interage com seus pares. Além dos jogos, a autora também sugere que se aproveite todas as situações possíveis de sala de aula, para se explorar a quantificação.

Desta forma, não defendo que em nossos planejamentos diários, haja um momento destinado à contagem mas, que esta esteja presente na maioria das atividades desenvolvidas durante a aula (hora da chamada, uso de calendário,distribuição/recolhimento de materiais,etc.). O papel do professor seria o de propiciar essas situações, bem como estimular e promover o desenvolvimento de cada criança.

Tenho constatado também, que a criança por si, não sente necessidade de contar por agrupamentos; sempre que se depara com uma coleção com uma quantidade maior de elementos, ela tenta fazer a contagem seqüencial, e nem sempre com sucesso. Isso sugere a necessidade de se criar, em sala de aula, situações onde a criança reconheça que não obterá êxito com a contagem um a um. Daí a importância de se trabalhar com jogos de agrupamentos em bases não decimais e na base dez, como por exemplo os jogos "nunca 2", "nunca 3",... "nunca 10" apresentados em Atividades Matemáticas, 1ª série.[4]

Outro ponto que defendo é o conhecimento da história do número, por parte do professor. Se este tem conhecimento da evolução histórica do conceito, ele estará mais atento ao programar suas atividades para as crianças.Se a humanidade levou tantos séculos para abstrair um conceito e criar formas de representação, por que não se levar isto em consideração, e não propiciar situações mais significativas para a criança ?

Acredito que, com a contagem consolidada e o conceito de número construído com significado, tornar-se-á mais fácil a construção, com significado, do sistema de numeração decimal.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BERGERON,Jacques C. e HERCOVICS,Nicolas. (1990). *Psychological aspects on learning early arithmetic* - Mathematics and Cognition - ICMI Study Series - Edited by Pearla Nesher e Jeremy Kilpatrick.

COSTA, Newton C. A. (1977). *Introdução aos Fundamentos da Matemática*. São Paulo: Hucitec.

DANTZIG, Tobias. (1990). *Número: a linguagem da ciência* . Rio de Janeiro: Zahar Editores.

FREUDENTHAL,Hans.(1973). *The number concept - objective acesses*. Mathematics as an educational task - Dordrecht,Rudel.

[4] Material publicado pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, Coordenadoria de Normas e Estudos Pedagógicos.

FUSON,Karen C. e HALL, James W. (1983). *The Acquisition of Early Number Word Meaning: A conceptual analysis and review* - The Development of Mathematical Thinking - Academic Press, Inc.Rochester,N.York.

GINSBURG, Herbert P. (1983). *The development of Mathematical Thinking*. Editor. Academic Press, Inc. Rochester, N. York.

IFRAH, Georges. (1989). *Os números : História de uma grande invenção.* São Paulo : Editora Globo.

zKAMII, Constance. (1986). *A criança e o número.* Campinas/SP: Papirus.

MOURA, M.Oriosvaldo. (1992). *Construção do signo numérico em situações de ensino.* Tese de Doutorado , USP - São Paulo.

PIAGET, J. (1981). *A gênese do número na criança* **.** J.Piaget e A.Szeminska - Rio de Janeiro: Zahar Editores.

VÉRGNAUD, G. (1988) *Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentatiotn* . Psychologie Française.

VYGOTSKY,L.S. - (1989). *Pensamento e Linguagem* . São Paulo: Martins Fontes.